COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU MARDI 4 JANVIER 1944.

PRÉSIDENCE DE M. GABRIEL BERTRAND, PUIS DE M. CHARLES MAURAIN.

M. **Gabriel Bertrand**, Président, fait connaître à l'Académie l'état où se trouve l'impression des Recueils qu'elle publie et les changements survenus parmi les Membres, les Associés étrangers et les Correspondants pendant le cours de l'année 1943.

État de l'impression des Recueils de l'Académie au 1er janvier 1944.

Comptes rendus des séances de l'Académie. — Le tome 213 (2e semestre de l'année 1941) a paru avec ses Tables; les tomes 214 (1er semestre de l'année 1942) et 215 (2e semestre de l'année 1942) paraîtront incessamment.

Les numéros du 1er semestre de l'année 1943 ont paru. Les matières des numéros du 2e semestre sont composées, mais les restrictions de papier en retardent le tirage, qui sera fait aussitôt qu'il sera possible. Le volume des Tables générales pour la période 1926-1940, *Auteurs*, est à l'impression.

Mémoires de l'Académie. — Le tome 66 paraîtra prochainement.

Notices et discours. — Le tome 2 est en préparation.

Procès-verbaux des séances de l'Académie des Sciences, tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835.

Un volume de Tables générales est en voie d'achèvement.

Annuaire de l'Académie. — L'Annuaire pour 1944 est sur le point de paraître.

Index biographique des Membres et Correspondants de l'Académie des Sciences. — Une nouvelle édition est en préparation.

Membres décédés depuis le 1er janvier 1943.

Section de Mécanique. — M. **Émile Jouguet**, le 2 avril, à Montpellier.

Section de Botanique. — M. **Henri Colin**, le 21 mars, à Paris.

Associés étrangers. — M. **Thomas Hunt Morgan**, en février, à Pasadena, Californie;

M. **Pieter Zeeman**, le 9 octobre, à Amsterdam.

Membres élus depuis le 1er janvier 1943.

Section de Mécanique. — M. **Ernest Vessiot**, le 29 novembre, en remplacement de M. **Louis de Broglie**, élu Secrétaire perpétuel pour les Sciences Mathématiques.

Section de Physique générale. — M. **Frédéric Joliot**, le 28 juin, en remplacement de M. **Édouard Branly**, décédé.

Section de Botanique. — M. **René Souèges**, le 29 novembre, en remplacement de M. **Henri Colin**, décédé.

Section des Académiciens libres. — M. **Albert Pérard**, le 11 janvier, en remplacement de M. **Alexandre Desgrez**, décédé.

M. **Gaston Ramon**, le 31 mai, en remplacement de M. **Jules-Louis Breton**, décédé.

Section des Membres non résidants. — M. **Émile Cotton**, le 8 novembre, en remplacement de M. **Pierre Weiss**, décédé.

Membres à remplacer.

Section de Mécanique. — M. **Émile Jouguet**, mort à Montpellier, le 2 avril 1943.

Section de Physique générale. — M. **Jean Perrin**, mort à New York, le 17 avril 1942.

Section de Chimie. — M. **Auguste Béhal**, mort à Mennecy (Seine-et-Oise), le 2 février 1941.

Section de Minéralogie. — M. **Charles Barrois**, mort à Sainte-Geneviève-en-Caux, par Auffray (Seine-Inférieure), le 5 novembre 1939.

Section des Membres non résidants. — M. **Paul Sabatier**, mort à Toulouse, le 14 août 1941.

Associés étrangers. — M. **Edmund Beecher Wilson**, mort à New York, le 3 mars 1939;

M. **Waldemar Christofer Brögger**, mort à Boekkelaget, près d'Oslo, le 17 février 1940;

Sir **Joseph John Thomson**, mort le 30 août 1940;

M. **Vito Volterra**, mort à Rome, le 11 octobre 1940;

M. **Tullio Levi-Civita**, mort à Rome, le 29 décembre 1941;

Sir **William Bragg**, mort le 12 mars 1942;

M. **Thomas Hunt Morgan**, mort à Pasadena, Californie, en février 1943;

M. **Pieter Zeeman**, mort à Amsterdam, le 9 octobre 1943.

Correspondants décédés depuis le 1er janvier 1943.

Pour la Section de Géométrie. — M. **David Hilbert**, le 14 février, à Göttingen;

M. **Georges Giraud**, le 16 mars, à Bonny-sur-Loire (Loiret).

Pour la Section de Botanique. — M. **Clodomir Houard**, le 10 août, à Misery, par Coulanges-sur-Yonne (Yonne);

M. **Seiitirô Ikeno**, le 4 octobre, à Tokyo;

M. **Albert Maige**, le 29 novembre, à Lille.

Pour la Section d'Économie rurale. — M. **Édouard Imbeaux**, le 25 juin, à Hyères (Var).

Pour la Section de Médecine et Chirurgie. — M. **Jean Sabrazès**, le 30 janvier, à Bordeaux.

M. **Émile Forgue**, le 1er février, à Grave (Ariège);

M. **Alexandre Yersin**, le 1er mars, à Nhatrang, Annam.

Correspondants élus depuis le 1er janvier 1943.

Pour la Section de Physique générale. — M. **Georges Reboul**, le 6 décembre, à Montpellier, en remplacement de M. **Émile Mathias**, décédé.

Pour la Section d'Anatomie et Zoologie. — M. **Paul Ancel**, le 7 juin, à Clermont-Ferrand, en remplacement de M. **Thomas Hunt Morgan**, élu Associé étranger.

Pour la Section de Médecine et Chirurgie. — M. **Émile Jeanbrau**, le 16 juin, à Montpellier, en remplacement de M. **Simon Flexner**, élu Associé étranger;

M. **Maurice Arthus**, le 21 juin, à Fribourg, Suisse, en remplacement de M. **Giuseppe Sanarelli**, décédé.

Correspondants à remplacer.

Pour la Section de Géométrie. — M. **Georges Giraud**, mort à Bonny-sur-Loire (Loiret), le 16 mars 1943;

M. **Émile Cotton**, élu membre non résidant, le 8 novembre 1943.

Pour la Section de Mécanique. — M. **Aurel Stodola**, mort à Zurich, le 25 décembre 1942.

Pour la Section d'Astronomie. — M. **Louis Fabry**, mort aux Lecques (Var), le 26 janvier 1939;

Sir **Frank Dyson**, mort en mer, au retour d'un voyage en Australie, le 25 mai 1939;

M. **Edmond Rothé**, mort à Lezoux (Puy-de-Dôme), le 28 août 1942.

Pour la Section de Géographie et Navigation. — M. **Jules Schokalsky**, mort le 26 mars 1940;

M. **William Bovie**, mort le 28 août 1940.

Pour la Section de Physique générale. — M. **Charles-Eugène Guye**, mort à Genève, le 15 juillet 1942.

Pour la Section de Chimie. — M. **Marcel Godchot**, mort à Montpellier, le 11 février 1939;

Sir **William Pope**, mort à Cambridge (Angleterre), le 17 octobre 1939;

M. **Frédéric Swarts**, mort à Gand (Belgique), le 6 septembre 1940;

Sir **Robert Hadfield**, mort le 1er octobre 1940.

Pour la Section de Minéralogie. — M. **Giuseppe Cesàro**, mort à Comblain-au-Pont (Belgique), le 20 janvier 1939.

Pour la Section de Botanique. — M. **Clodomir Houard**, mort à Misery, par Coulanges-sur-Yonne (Yonne), le 10 août 1943.

M. **Seiitirô Ikeno**, mort à Tokyo, le 4 octobre 1943;

M. **Albert Maige**, mort à Lille, le 29 novembre 1943.

Pour la Section d'Économie rurale. — M. **François-Xavier Lesbre**, mort à Lyon, le 26 janvier 1942;

M. **Henri Lagatu**, mort à Montpellier, le 31 janvier 1942;

M. **Édouard Imbeaux**, mort à Hyères (Var), le 25 juin 1943.

Pour la Section d'Anatomie et Zoologie. — M. **Albert Vayssière**, mort à Marseille, le 13 janvier 1942;

M. **Auguste Lameere**, mort à Ixelles-lez-Bruxelles, le 6 mai 1942.

Pour la Section de Médecine et Chirurgie. — M. **Jean Sabrazès**, mort à Bordeaux, le 30 janvier 1943.

M. **Émile Forgue**, mort à Grave (Ariège), le 1er février 1943;

M. **Alexandre Yersin**, mort à Nhatrang, le 1er mars 1943.

Pour les Sections qui pourront être désignées par l'Académie :

A. — Le Correspondant suivant pour la Section de Mécanique : M. **Joseph Auclair**, mort à Saint-Léger-sur-Roanne, le 12 décembre 1936.

B. — Le Correspondant suivant pour la Section de Chimie : M. **Amé Pictet**, mort à Genève, le 11 mars 1937.

C. — Le Correspondant suivant pour la Section de Physique générale : M. **Camille Gutton**, élu Académicien libre, le 31 janvier 1938.

D. — Le Correspondant suivant pour la Section de Mécanique : M. **John Alexander Low Waddell**, mort à New York, le 3 mars 1938.

E. — Le Correspondant suivant pour la Section de Botanique : M. **Lucien Daniel**, mort à Rennes, le 26 décembre 1940.

F. — Le Correspondant suivant pour la Section de Géométrie : M. **David Hilbert**, mort à Göttingen, le 14 février 1943.

M. **Gabriel Bertrand**, Président sortant, s'exprime en ces termes :

Mes chers Confrères,

Au moment de quitter la présidence que vous m'aviez fait le grand honneur de me confier, j'éprouve le besoin de vous renouveler mes remercîments pour cette marque de confiance et de sympathie à laquelle j'ai été très sensible et que je ne saurai jamais oublier.

Je tiens à remercier aussi MM. Alfred Lacroix et Louis de Broglie, nos très actifs et très dévoués Secrétaires perpétuels, et M. le Secrétaire de l'Académie pour le concours précieux qu'ils m'ont apporté et qui a rendu ma tâche si facile.

Grâce aux démarches et aux efforts qui ont été faits par tous ceux qui en ont la charge, la publication des *Comptes rendus* de nos séances a pu gagner encore un peu sur le retard en lequel elle se trouvait l'année dernière et nous pouvons

espérer, si de nouvelles difficultés ne se présentent pas, qu'elle sera bientôt à jour.

Je profite de la position que j'occupe encore cette minute pour vous adresser, mes chers Confrères, mes meilleurs souhaits pour l'année 1944.

Et je prie mon éminent successeur, M. Charles Maurain, dont je garde toujours le bon souvenir du temps où il était mon Doyen à la Faculté des Sciences, d'occuper le fauteuil présidentiel, ainsi que M. Maurice Caullery, Vice-Président, de venir prendre sa place au bureau.

En prenant possession du fauteuil de la Présidence, M. **Charles Maurain** s'exprime en ces termes :

Mes chers Confrères,

La présidence de l'Académie des Sciences n'est pas une bien lourde charge. Le Président peut compter sur l'expérience, la bienveillance et l'autorité de nos Secrétaires Perpétuels, gardiens vigilants et dévoués des traditions et des intérêts de l'Académie; il a devant lui une longue suite de précieux exemples; enfin, il a fait pendant toute une année un apprentissage, pour moi particulièrement agréable aux côtés de M. Gabriel Bertrand, qui a présidé l'Académie avec tant de bonne grâce, et d'assiduité.

Mais, si elle n'est pas une lourde charge, cette présidence est un bien grand honneur, dont je vous suis redevable. L'Académie n'est-elle pas la haute représentation de la Science française ! En réfléchissant à ce rôle magnifique, je me demandais si l'évolution vertigineuse de la vitesse des transports à l'époque actuelle n'arriverait pas à susciter quelque changement dans les conditions où il s'exerce en nos séances. Les savants qui ont formé, vers le milieu du XVIIe siècle, un groupement d'où est sortie l'Académie des Sciences, étaient des parisiens; la lenteur des voyages à cette époque n'eût pas permis à des personnes habitant loin de Paris de s'y rendre avec quelque assiduité à des séances régulières. Pendant longtemps, la situation ne s'est guère modifiée : pour transporter les voyageurs d'Orléans à Paris, la poste mettait trois jours vers la fin du XVIIe siècle, presque deux vers la fin du XVIIIe, et encore une grande demi-journée lorsque les chemins de fer apparurent. Les trains rapides ont mis Orléans à guère plus d'une heure de Paris, et Marseille à neuf heures. Mais voilà que les records de vitesse ont atteint près de 600km à l'heure en automobile, et plus de 750 en avion. Sans doute des difficultés de toutes sortes surgissent, surtout pour l'avion, au départ, à l'arrivée et en route. Mais, en songeant aux progrès réalisés, il est permis d'en espérer d'autres, lorsqu'on pourra consacrer aux recherches de construction quelques bribes des sommes englouties maintenant dans des destructions, et il n'est pas interdit de penser qu'on saura quelque jour venir à Paris de tous les points de la France en des

temps comparables à ceux qu'on mettait naguère encore à y venir de bien des points du département de Seine-et-Oise.

Je suis un peu effrayé de me laisser entraîner à des considérations où l'on pourrait voir percer quelque pointe visant le règlement de l'Académie; ma pensée est moins téméraire; elle est seulement l'espoir que cette évolution des vitesses permettra, en d'autres temps, à un plus grand nombre de savants français d'assister souvent aux séances de l'Académie, à quelque titre que ce soit, et rendra ainsi ces séances encore plus représentatives de la Science française qu'elles ne l'ont été jusqu'à présent.

Actuellement, d'autres pensées nous assiègent. Les recherches expérimentales sont lourdement entravées par la pénurie de matières premières, le défaut de main-d'œuvre dans les ateliers, les vides dans les laboratoires, l'arrêt presque complet des relations avec l'étranger; l'accroissement effrayant des prix rendrait d'ailleurs les crédits très insuffisants. Les publications subissent des restrictions désastreuses, et la communication de la pensée scientifique est réduite et tardive. Devant ces difficultés inouïes, le devoir est de ne pas se laisser abattre et de redoubler de travail et d'ingéniosité pour maintenir, au-dessus des tristesses et des ruines, la vie sereine et fructueuse de la Science. C'est un devoir auquel n'ont pas failli nos laboratoires, soutenus par les encouragements (malheureusement un peu platoniques) de l'Académie, et par l'aide précieuse du Service de la Recherche scientifique, création magnifique de notre grand Confrère Jean Perrin, et qui, après l'évolution et les retouches inévitables à tout organisme nouveau, est dirigé maintenant de manière si heureuse et si dévouée par notre Confrère Charles Jacob.

Donnons à ce devoir tous nos efforts et tout notre cœur, pour la Science et pour la France.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ASTRONOMIE. — *Sur l'influence de l'expansion de l'Univers et l'absorption internébulaire dans le dénombrement, par magnitudes, des nébuleuses spirales*, Note de M. **Ernest Esclangon**.

Le dénombrement des nébuleuses spirales montre que N, désignant le nombre de ces astres dont les magnitudes sont inférieures ou égales à m, est, d'après Huble, donné par les formules

(1) $\log N = 0{,}60\,m - 4{,}45$ pour m inférieur à 18,

(2) $\log N = 0{,}50\,m - 2{,}77$ pour m compris entre 18 et 21.

La dérivée $d\log N/dm$ est ainsi *décroissante* lorsque m croît entre 18 et 21.

Dans l'hypothèse d'une *répartition uniforme* de ces astres dans l'espace, au

moins jusqu'aux limites actuelles de visibilité, en les supposant, en outre, de même éclat absolu et en état d'immobilité relative, cette dérivée serait constante et égale à 0,6.

Il se manifeste donc, avec l'observation, un écart notable qu'on a attribué à un effet d'expansion de l'Univers, combiné avec l'influence de la déviation des spectres vers le rouge sur la sensibilité photographique. Il faut toutefois remarquer qu'il ne s'agit pas ici de longueurs d'onde isolées et, qu'une longueur d'onde étant déplacée vers le rouge, une autre peut venir la remplacer, ce qui limite l'effet considéré, lequel est lié, en définitive, à la position et au degré d'étalement du maximum d'intensité dans le spectre.

D'autre part il y a lieu de considérer l'affaiblissement apparent de l'énergie lumineuse résultant de la vitesse de fuite, qui, en augmentant toutes les longueurs d'onde (et les périodes de vibration), diminue ainsi l'énergie totale incidente.

Pour ces raisons, nous représenterons l'ensemble de ces effets par le facteur $1/[1+(v/c)]^{2p}$ (v vitesse de fuite, c vitesse de la lumière), forme analytique qui, étant donnée la petitesse relative de v/c, ne nuit en rien à la généralité.

De plus nous introduirons une *absorption* (ou déperdition) éventuelle dans les espaces internébulaires, représentée en fonction de la distance r par un facteur $e^{-2\beta r}$.

Soit donc r_0 la distance d'une nébuleuse à une époque origine $t_0=0$; sa distance à l'époque t sera donnée par

$$(3)\qquad r=r_0e^{\alpha t}, \qquad \text{avec}\ v=\frac{dr}{dt}=\alpha r.$$

Si nous prenons comme unité de temps le *million d'années*, comme unité de distance le *million d'années lumière*, la vitesse c de la lumière devient égale à *un* et α est sensiblement égal à 6.10^{-4}, le produit αr restant inférieur à $1/7$ dans les limites actuelles de visibilité des nébuleuses.

Supposons les nébuleuses de même éclat absolu I mesuré pour chacune d'elles à une distance invariable, égale à l'unité. L'éclat apparent i d'un tel astre, de magnitude m, sera donné par

$$(4)\qquad \frac{I}{i}=10^{0,4(m-\mu)},$$

μ désignant la magnitude absolue définie par I (à l'unité de distance) ([1]).

Considérons les nébuleuses vues à l'époque t avec la magnitude m. Les rayons lumineux parvenant à l'époque t sont partis de ces astres à une époque θ et pour laquelle on a $r=r_0e^{\alpha\theta}$.

([1]) Cette magnitude absolue moyenne (à un million d'années lumière) paraît se placer aux environs de 8,6 pour la magnitude photographique, de 7,5 pour la magnitude visuelle,

D'autre part l'éclat apparent de ces nébuleuses sera défini par

$$(5)\qquad \frac{I}{i} = 10^{0,4(m-\mu)} = \varphi(r),$$

sans faire, pour l'instant, aucune hypothèse particulière sur $\varphi(r)$.

Soit $r = \Phi(m)$ la fonction inverse tirée de (5). On aura donc

$$(6)\qquad r = r_0 e^{\alpha\theta} = \Phi(m).$$

D'autre part, dans l'intervalle de temps $t - \theta$, le rayon lumineux a parcouru la distance r; d'où

$$(7)\qquad t - \theta = r_0 e^{\alpha\theta} = \Phi(m)$$

et, par élimination de θ entre (6) et (7),

$$(8)\qquad r_0 = e^{-\alpha t}\Phi(m)e^{\alpha\Phi(m)}.$$

La répartition étant uniforme, le nombre N des nébuleuses, vues à l'époque t avec une magnitude inférieure ou égale à m, sera proportionnel à r_0^3, de sorte que l'on aura

$$(9)\qquad \log N = -3\alpha t \log e + 3 \log \Phi(m) + 3\alpha\Phi(m) \log e + \text{const.}$$

Les nombres N diminuent quand t augmente. En un million d'années ils se réduiraient de près de 2/1000 de leur valeur.

Si nous prenons comme origine du temps l'époque actuelle ($t = t_0 = 0$), on aura donc

$$(10)\qquad \log N = 3 \log \Phi(m) + 3\alpha\Phi(m) \log e + \text{const.}$$

Il s'agit maintenant d'expliciter $\Phi(m)$. D'après ce qui a été dit ci-dessus, nous pourrons écrire

$$(11)\qquad \frac{i}{I} = \frac{e^{-2\beta r}}{r^2(1+\alpha r)^{2p}}, \qquad \text{ou} \qquad r(1+\alpha r)^p e^{\beta r} = 10^{0,2(m-\mu)},$$

ce qui définit la fonction $r = \Phi(m)$. L'exposant positif p serait au moins égal à *un* s'il s'agissait d'une radiation monochromatique; comme il s'agit d'un ensemble de radiations dont la plaque photographique ne recueille qu'une bande, il peut s'établir une compensation partielle, malgré le déplacement de la totalité du spectre vers le rouge.

En remplaçant $\Phi(m)$ par sa valeur, définie par (11), on obtient ainsi

$$(12)\qquad \frac{d\log N}{dm} = 0,6 \frac{(1+\alpha r)^2}{1+[(p+1)\alpha+\beta]r+\alpha\beta r^2},$$

$$(13)\qquad \frac{d^2\log N}{dm^2} = \big[[(p+1)\alpha-\beta]\alpha r-[(p-1)\alpha+\beta]\big] \times \frac{0,12.\mathrm{L}10.r(1+\alpha r)^2}{\big[1+[(p+1)\alpha+\beta]r+\alpha\beta r^2\big]^3}.$$

Nous avons à exprimer maintenant que, pour les magnitudes élevées, 20 par exemple [ce qui correspond sensiblement à $r_1 = 167$, $\alpha r_1 = (1/10)$], l'expres-

sion (12) est égale à 0,50 et qu'elle est décroissante. On obtient ainsi

$$(14)\qquad \beta r_1 = 0,2 + 1,2\alpha r_1 - \frac{p\alpha r_1}{1+\alpha r_1} = \frac{3,5-p}{11},$$

$$(15)\qquad p - 0,2\left(1+\frac{1}{\alpha r_1}\right)^2 = p - 24 < 0;$$

ce qui donne comme seule condition d'inégalité $p < 3,5$, car β doit être positif. La discussion montre d'ailleurs que, si $p > 1$, la fonction (12) passe par un minimum au delà de $r = r_1$. La solution $\beta = 0$ n'est pas exclue, mais elle déterminerait nécessairement p, qui serait voisin de 3,5, valeur qui paraît un peu élevée.

En faisant $p = 0$, la relation (14) fournit un maximum pour β, à savoir $\beta = 1/525$. Dans les conditions de ce maximum, une nébuleuse située à 250 millions d'années lumière perdrait, du fait de l'absorption, les 6/10 de son éclat; à un million d'années lumière, la perte serait seulement des 4/1000.

En résumé, cette discussion montre que la représentation des observations est compatible avec l'existence d'une absorption (ou déperdition) internébulaire, et même, qu'une telle hypothèse ne peut être écartée qu'en supposant, pour les plaques photographiques utilisées pour les dénombrements, une forte perte de sensibilité par déplacement des spectres vers le rouge.

Il est à remarquer enfin que, si la vitesse de fuite devait être regardée comme inexistante ($\alpha = 0$), et dans l'hypothèse d'une répartition uniforme, l'existence d'une absorption internébulaire s'imposerait absolument [formule (4)], avec $\beta r_1 = 0,2$, c'est-à-dire β voisin de 1/800.

Le problème pourra être plus grandement éclairci lorsqu'auront pu être prolongés les dénombrements de nébuleuses plus lointaines. A ce point de vue, comme en tant d'autres, le grand télescope de 5m d'ouverture, en préparation aux États-Unis, donnera des possibilités nouvelles.

Toutefois une question se pose. En admettant qu'on dispose de télescopes infiniment puissants et que des nébuleuses puissent atteindre des vitesses égales à celle de la lumière, resteront-elles visibles ? Avec les anciennes théories de la lumière, la réponse ne serait pas douteuse; elles resteraient visibles. Avec les théories actuelles, jointes à celle de la relativité, on obtient des conclusions discordantes suivant la manière dont le problème est envisagé.

CORRESPONDANCE.

M. le Secrétaire perpétuel signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Amédée Fayol. *Philippe Lebon, inventeur du gaz d'éclairage*. Préface de Jérôme et Jean Tharaud (présenté par M. Joseph Bethenod).

THÉORIE DES NOMBRES. — *Remarques arithmétiques en connexion avec le dernier théorème de Fermat.* Note de M. **Charles Pierre.**

I. On sait que l'on ne peut avoir $x^P + y^P = z^P$, P étant premier, qu'à la condition d'avoir

$$(x+y)^P - x^P - y^P \equiv 0 \pmod{P^2}. \tag{1}$$

Je me propose d'envisager quelques aspects du problème suivant : si P est de la forme $6k-1$, est-il possible que la congruence (1) soit vérifiée par des nombres tous premiers avec P?

Ainsi que l'a montré Cauchy [1], le premier membre de (1) peut se développer

$$(x+y)^P - x^P - y^P = P\,xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^\alpha\,\Phi_P(x,y)\quad\begin{cases}\alpha=1, & \text{si } P=6k-1;\\ \alpha=2, & \text{si } P=6k+1.\end{cases}$$

Pour que (1) soit vérifiée pour des entiers x, y, $x+y$ premiers avec P, il faut que l'on ait soit

$$x^2+xy+y^2 \equiv 0 \pmod{P}, \tag{2}$$

soit

$$\Phi_P(x,y) \equiv 0 \pmod{P}. \tag{3}$$

Si $P=6k+1$, (2) est toujours possible. Mais, si $P=6k-1$, (2) n'est pas possible. Il suffit donc que (3) soit impossible pour que $x^P+y^P=z^P$ ne puisse être résolu en nombres entiers premiers avec P si $P=6k-1$.

II. $\Phi_P(x,y)$ peut se développer selon la formule de Waring [2] appliquée aux racines de l'équation

$$[X+(x+y)][X-x][X-y] = X^3-(x^2+xy+y^2)X+xy(x+y)=0.$$

On a

$$\begin{aligned}\Phi_P(x,y) = {} & (x^2+xy+y^2)^{3\left[\frac{P\pm1}{6}-1\right]}+\ldots\\ & +\frac{[P-(2p+1)][P-(2p+3)]\ldots[P+5-6p]}{2^{2(p+1)}(2p-1)!}\\ & \times(x^2+xy+y^2)^{3\left[\frac{P\pm1}{6}-p\right]}[x^2y^2(x+y)^2]^{p-1}\ldots.\end{aligned}$$

Si nous posons $(x^2+xy+y^2)^3+Nx^2y^2(x+y)^2\equiv 0 \pmod{P}$, il est clair que, pour démontrer l'impossibilité de $\Phi_P(x,y)\equiv 0 \pmod{P}$, il suffit de démontrer l'incompatibilité des congruences

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\Phi_P(N)\equiv N^{\frac{P\pm1}{6}-1}+\ldots-(-1)^{p}\frac{[P-(2p+1)][P-(2p+3)]\ldots[P+5-6p]}{2^{2(p-1)}(2p-1)!}N^{\frac{P\pm1}{6}-p}\ldots\equiv 0\\ &(x^2+xy+y^2)^3+Nx^2y^2(x+y)^2\equiv 0.\end{aligned}\right\}\pmod{P},$$

---

[1] *Comptes rendus*, 9, 1839, p. 362.

[2] Serret, *Algèbre supérieure*, 4e édit., I, p. 449, formule (8).

Afin de transformer la seconde condition nous établirons deux théorèmes :

1er Théorème. — *Pour que la congruence*

$$(x^2+xy+y^2)^3+\mathrm{N}x^2y^2(x+y)^2\equiv 0 \pmod{\mathrm{P}}$$

soit possible, il faut et il suffit que la congruence $\mathrm{X}^3+\mathrm{NX}+\mathrm{N}\equiv 0 \pmod{\mathrm{P}}$ *ait au moins deux solutions distinctes.*

Supposons que $\mathrm{X}^3+\mathrm{NX}+\mathrm{N}\equiv 0$ ait au moins deux racines distinctes. Ses racines seront a, b et $-(a+b)$ et l'on aura

$$a^2+ab+b^2\equiv-\mathrm{N} \quad \text{et} \quad ab(a+b)\equiv \mathrm{N},$$

d'où

$$(a^2+ab+b^2)^3+\mathrm{N}a^2b^2(a+b)^2\equiv 0 \pmod{\mathrm{P}}.$$

La condition est donc suffisante. Elle est nécessaire. Soient en effet deux entiers x et y tels que

$$xy(x+y)\not\equiv 0, \qquad (x^2+xy+y^2)^3+\mathrm{N}x^2y^2(x+y)^2\equiv 0.$$

Soit la congruence $\mathrm{X}^3+p\mathrm{X}+q\equiv 0$ admettant les racines δx, δy et $\delta(x+y)$. Si l'on prend $\delta(x+y)xy-(x^2+xy+y^2)\equiv 0$ il est aisé de voir que l'on aura $p\equiv q\equiv \mathrm{N}$. La congruence $\mathrm{X}^3+\mathrm{NX}+\mathrm{N}\equiv 0 \pmod{\mathrm{P}}$ admet donc au moins deux racines distinctes.

2e Théorème. — *Étant donné un premier* $\mathrm{P}=6k\pm 1$, *l'étude de la congruence* $\mathrm{X}^3+p\mathrm{X}+q\equiv 0 \pmod{\mathrm{P}}$ *dépend uniquement de l'étude du nombre*

$$\mathrm{N}\equiv\frac{p^3}{q^2} \pmod{\mathrm{P}}.$$

1° *Si* $-(4\mathrm{N}+27)$ *est non résidu quadratique de* P, *la congruence a une solution et une seule* $<\mathrm{P}$ (³).

2° *Si* $4\mathrm{N}+27\equiv 0$ (*mod* P) *la congruence a deux solutions distinctes* $<\mathrm{P}$.

3° *Si* $-(4\mathrm{N}+27)$ *est résidu quadratique de* P *et si* N *est solution de la congruence*

$$\Psi_{\mathrm{P}}(\mathrm{N})\equiv\mathrm{N}^{\frac{\mathrm{P}\pm1}{6}-1}-3\frac{(\mathrm{P}-5)(\mathrm{P}-7)}{4.6}\mathrm{N}^{\frac{\mathrm{P}\pm1}{6}-2}$$
$$-(-1)^p(2p-1)\frac{[\mathrm{P}-(2p+1)][\mathrm{P}-(2p+3)]\ldots[\mathrm{P}+5-6p]}{2^{2(p-1)}(2p-1)!}\mathrm{N}^{\frac{\mathrm{P}\pm1}{6}-1}\ldots\equiv 0 \quad (\mathrm{P}),$$

la congruence a trois solutions distinctes $<\mathrm{P}$.

4° *Si* $-(4\mathrm{N}+27)$ *est résidu quadratique de* P *sans que* N *soit solution de* $\psi_{\mathrm{P}}(\mathrm{N})\equiv 0 \pmod{\mathrm{P}}$, *la congruence n'a pas de solution.*

5° *Il y a* k *valeurs de* N *pour lesquelles la congruence a plusieurs solutions distinctes et* $2k$ *valeurs de* N *pour lesquelles elle n'a pas de solution.*

V. L'étude de la congruence $\Phi_{\mathrm{P}}(x, y)\equiv 0 \pmod{\mathrm{P}}$ est ainsi ramenée à

(³) *Bull. Amer. Math. Soc.*, **13**, 1907, pp. 1 à 8.

l'étude des systèmes de congruence

(A) $\Phi_P(N) \equiv 0, \quad \Psi_P(N) \equiv 0 \pmod P$

(B) $\Phi_P(N) \equiv 0, \quad 4N + 27 \equiv 0 \pmod P$,

où $\Phi_P(N)$ et $\Psi_P(N)$ sont des polynomes de même puissance dont les coefficients des termes de même rang sont liés par une relation simple.

En particulier l'étude du système (B) permet de voir facilement qu'il ne peut être vérifié que si $2^{P-1} \equiv 1 \pmod{P^2}$ est possible, condition déjà énoncée et démontrée par Wieferich, Frobenius, Mirimanoff et Fortwängler mais d'une façon fort différente. Or jusqu'à présent cette congruence n'a été vérifiée que pour $P = 1093$, qui est de la forme $6k+1$. Il est donc permis de penser que les congruences (B) sont incompatibles pour $P = 6k-1$; mais c'est une simple conjecture qu'il resterait à démontrer.

Quant au système (A), des vérifications effectuées jusqu'à $P = 500$ portent à croire qu'il n'est jamais vérifié quel que soit P premier; c'est une autre conjecture à démontrer.

Quoi qu'il en soit, il est permis de penser que l'étude des systèmes de congruences (A) et (B) permettra de savoir si l'équation de Fermat peut être résolue ou non, en nombres entiers tous premiers avec P, si P est de la forme $6k-1$.

GÉOMÉTRIE. — *Sur la géométrie du tétraèdre.*

Note de M. **Victor Thébault**, présentée par M. Élie Cartan.

Soient a, a', b, b', c, c' les longueurs des arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC et les dièdres correspondants, et A, B, C, D les aires des faces, V le volume du tétraèdre fondamental $T \equiv ABCD$.

1. Projetons orthogonalement un point A_1 de la face BDC de T en B_1 sur la face CDA, puis projetons B_1 en D_1 sur CBA, D_1 en C_1 sur BDA et C_1 en A_2 sur BDC. (Pour fixer les idées, on suit le sens positif BDC sur le périmètre du triangle BDC dans la succession des faces CDA, BAC, DAB.)

La condition nécessaire et suffisante pour que le contour polygonal des vecteurs $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1A_2}$ se ferme en $A_2 \equiv A_1$ est que ces vecteurs soient proportionnels aux aires B, D, C, A des faces sur lesquelles ils sont perpendiculaires. Si un quadrangle gauche $Q_1 \equiv A_1B_1D_1C_1$, associé à un tétraèdre T dont le *premier* point de Lemoine est K, remplit cette condition, les plans normaux aux côtés A_1B_1, B_1D_1, D_1C_1, C_1A_1, en leurs milieux, concourent au centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $T_1 \equiv A_1B_1D_1C_1$ qui coïncide avec le point K dont les coordonnées normales, par rapport à T, sont proportionnelles à C_1A_1, A_1B_1, D_1C_1, B_1D_1; de sorte que $C_1A_1 = 2KK_a$, $A_1B_1 = 2KK_b$, $D_1C_1 = 2KK_c$, $B_1D_1 = 2KK_d$, K_a, K_b, K_c, K_d étant les projections de K sur les faces de T. Le tétraèdre T étant donné, on construit aisément le quadrangle Q_1. Il y a trois quadrangles gauches

$$Q_1 \equiv A_1B_1D_1C_1, \quad Q_2 \equiv A_2C_2B_2D_2, \quad Q_3 \equiv A_3D_3C_3B_3,$$

orthogonalement inscrits à T, et si l'on parcourt le périmètre du triangle BDC dans le sens opposé, on en détermine trois autres Q'_1, Q'_2, Q'_3.

Les angles A_1, B_1, D_1, C_1 de Q_1 sont égaux à c', b, c, b'. Les diagonales B_1C_1, A_1D_1 sont perpendiculaires et inversement proportionnelles aux plus courtes distances des arêtes AB et DC, AC et DB et l'on parvient à des conclusions analogues pour les angles et les diagonales de Q_2 et Q_3. On a donc

$$A_1C_1 = A_2D_2 = A_3B_3 = 2KK_a, \qquad B_1A_1 = B_2C_2 = B_3C_3 = 2KK_b,$$
$$C_1D_1 = C_2A_2 = C_3D_3 = 2KK_c, \qquad D_1B_1 = D_2B_2 = D_3A_3 = 2KK_d,$$
$$A_1D_1 = C_2D_2 = k(A^2 + C^2 - 2AC\cos b')^{\frac{1}{2}} = k(B^2 + D^2 - 2BD\cos b)^{\frac{1}{2}} = (kbb'\sin\theta) : 2,$$
$$B_1C_1 = A_3C_3 = \ldots, \qquad A_2B_2 = B_3D_3 = \ldots,$$

θ étant l'angle des arêtes CA et DB et $k = 6V : (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)$.

2. Théorème. — *Dans tout tétraèdre* $T \equiv ABCD$, *les sommets des deux quadrangles gauches orthogonalement inscrits* Q_1 *et* Q'_1, Q_2 *et* Q'_2, Q_3 *et* Q'_3 *sont respectivement huit points d'une même sphère centrée au premier point de Lemoine* K (secondes sphères de Lemoine).

En effet les tétraèdres $T_1 \equiv A_1B_1D_1C_1$ et $T'_1 \equiv A'_1C'_1D'_1B'_1$, ayant leurs arêtes homologues égales et parallèles, sont égaux; leurs sphères circonscrites (K_1) et (K'_1) sont égales et coïncident, puisqu'elles sont centrées au premier point de Lemoine K (I). De même les tétraèdres $T_2 \equiv A_2C_2B_2D_2$ et $T'_2 \equiv A'_2D'_2B'_2C'_2$ sont inscrits dans une sphère (K_2), de centre K, et les tétraèdres $T_3 = A_3D_3C_3B_3$ et $T'_3 \equiv A'_3B'_3C'_3D'_3$ dans une sphère (K_3), de centre K. Les tétraèdres T_1 et T'_1, T_2 et T'_2, T_3 et T'_3 sont symétriques par rapport à K.

Pour que quatre tétraèdres T_1, T'_1, T_2, T'_2 soient inscrits dans une même sphère de centre K, il faut et il suffit que les dièdres (A_1D_1) et (C_2D_2) soient droits, ce qui exige que les arêtes CA et DB de T soient rectangulaires. Si deux autres arêtes opposées sont rectangulaires, c'est-à-dire si T est *orthocentrique*, les six tétraèdres T_1, T'_1, ..., T_3, T'_3 sont inscrits dans une même sphère de centre K. Le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre T_1 est

$$\rho_1 = \frac{1}{4} kbb'\sin\theta \left[\frac{1}{\sin^2\theta}(\cot g\, b' - \cot g\, b\cos\theta)^2 + \frac{1}{\sin^2 b} \right]^{\frac{1}{2}},$$

et l'on a des expressions analogues pour les rayons ρ_2 et ρ_3 des sphères circonscrites à T_2, T_3. Dans le cas où T est *orthocentrique*,

$$\rho_1 = \frac{2ABCD}{3V(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)}(1 - \cos b\cos b')^{\frac{1}{2}} = \rho_2 = \rho_3,$$

car, dans cette hypothèse, $\cos a \cos a' = \cos b \cos b' = \cos c \cos c'$.

N. B. — 1° Dans un tétraèdre orthocentrique T où ω_a, ω_b, ω_c, ω_d sont les demi-angles au sommet des cônes de révolution, de sommet K, passant par les intersections de la sphère (K) de Lemoine avec les faces BCD, CDA, DAB, ABC, on a en outre

$$A : B : C : D = \cos\omega_a : \cos\omega_b : \cos\omega_c : \cos\omega_d.$$

2° Les tétraèdres T_1, T_2, T_3, dont deux dièdres supplémentaires sont compris entre deux faces égales chacune à chacune, sont équivalents.

3. Les contours $D_1A_1B_1C_1$, $A_1B_1C_1D_1$, $B_1C_1D_1A_1$, $C_1D_1A_1B_1$, projetés orthogonalement sur D_1A_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, donnent

$$\overline{D_1A_1} = \overline{A_1B_1}\cos c' + \overline{B_1C_1}\cos b' + \overline{C_1D_1}\cos a, \qquad \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1}\cos a' + \overline{C_1D_1}\cos b + \overline{D_1A_1}\cos c',$$
$$\overline{B_1C_1} = \overline{D_1A_1}\cos a' + \overline{A_1B_1}\cos a' + \overline{C_1D_1}\cos c, \qquad \overline{C_1D_1} = \overline{D_1A_1}\cos a + \overline{A_1B_1}\cos b + \overline{B_1C_1}\cos c.$$

Or, dans le tétraèdre T,

$$A = B\cos c' + C\cos b' + D\cos a, \qquad B = C\cos a' + A\cos c' + D\cos b,$$
$$C = A\cos b' + B\cos a' + D\cos c, \qquad D = A\cos a + B\cos b + C\cos c. \tag{1}$$

Il en résulte, $A = k.D_1A_1$, $B = k.A_1B_1$, $C = k.B_1C_1$, $D = k.C_1D_1$.

Étant donnés la longueur D_1B_1 et l'angle des plans $D_1A_1B_1$ et $D_1B_1C_1$ (paramètres arbitraires), pour construire T, connaissant les aires A, B, C, D des faces, on construira le quadrangle gauche $D_1A_1B_1C_1$; les plans perpendiculaires en A_1, B_1, C_1, D_1 à D_1A_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 déterminent un tétraèdre T′ semblable au tétraèdre T de faces A, B, C, D. Le tétraèdre T sera le transformé de T′ par une homothétie convenable. Le volume du tétraèdre T obtenu par cette construction varie de 0 à ∞.

On peut encore, dans les équations (1), se donner arbitrairement deux des dièdres de T; par là-même les deux autres sont déterminés. La construction d'un tétraèdre dont on connaît les aires des faces est donc *doublement indéterminée*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Correspondance des fonctions de fonctions dans des transformations fonctionnelles définies par généralisation de la transformation de Laplace.* Note de M. **Marcel Bayard**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Les correspondances de Laplace, de Fourier et leurs inverses font correspondre à une fonction originelle $F(y)$ une fonction transformée $f(x)$ par des mécanismes opératoires qui rentrent dans la définition plus générale suivante :

Étant donné un opérateur, que nous désignerons par $\underset{y}{\mathbf{H}}$, dont l'action sur le produit de deux fonctions $M(x, y)$ et $F(y)$ est de faire disparaître la variable y, la fonction $f(x)$ résultat de cette opération

$$f(x) = \underset{y}{\mathbf{H}}\{M(x, y).F(y)\}$$

peut être dite la fonction transformée de F par l'action de l'opérateur **H** et du noyau M; écrivons-la suivant une notation déjà utilisée pour la transformation de Laplace-Carson (cf. *Mémorial des Sciences mathématiques*, fascicule C, *Formulaire pour le calcul symbolique*, par MM. Mc Lachlan et Pierre Humbert)

$$f(x) \subset F(y).$$

On observe en particulier que toute équation intégrale de 1re espèce de Volterra ou de Fredholm définit une transformation rentrant dans la définition ci-dessus, l'opérateur étant alors

$$\int^{b} dy \quad \text{ou} \quad \int_{0}^{x} dy$$

et $M(x, y)$ le noyau de l'équation intégrale.

Le problème de la correspondance des fonctions de fonctions est le suivant : connaissant la correspondance $f(x) \subset F(y)$, trouver la fonction $F_G(y)$ qui correspond à $f[g(x)]$ soit $F_G(y) \supset f[g(x)]$, $g(x)$ étant une fonction donnée.

Les définitions et les hypothèses faites s'écrivent

$$(1) \qquad f[g(x)] = \underset{y}{\mathbf{H}}\{F_G(y).M(x, y)\} = \underset{z}{\mathbf{H}}\{F(z).M[g(x), z]\}.$$

Nous chercherons une solution de la forme

$$F_G(y) = \underset{z}{\mathbf{H}}\{F(z).\Gamma(y, z)\};$$

en portant dans la première expression (1), on obtient

$$(2) \quad f[g(x)] = \underset{y}{\mathbf{H}}\{M(x, y).\underset{z}{\mathbf{H}}[F(z).\Gamma(y, z)]\} = \underset{z}{\mathbf{H}}\{F(z).\mathbf{H}[\Gamma(y, z).M(x, y)]\},$$

sous la seule réserve que *l'opération* **H** *est commutative*.

La comparaison de (1) et (2) donne la solution par une égalité qui ne contient pas $F(y)$ soit

$$M[g(x), z] = \underset{y}{\mathbf{H}}\{\Gamma(y, z).M(x, y)\},$$

c'est-à-dire par la correspondance

$$M[g(x), z] \subset \Gamma(y, z)$$

qui définit la fonction auxiliaire Γ permettant d'assurer dans la fonction transformée le remplacement de la variable x par la fonction $g(x)$.

Le résultat obtenu est applicable à la transformation de Laplace-Carson, sur laquelle est fondé le calcul symbolique de Heaviside,

$$f(x) = \int_0^{\infty} dy.x e^{-xy}.F(y).$$

La fonction correspondante $F_G(y)$ de $f[g(x)]$ sera donnée par

$$F_G(y) = \int_0^{\infty} F(z).\Gamma(y, z)\, dz,$$

la fonction auxiliaire Γ étant définie par l'équation intégrale

$$(3) \qquad g(x)\, e^{-z.g(x)} = \int_0^{\infty} x\, e^{-xy}\, \Gamma(y, z)\, dy.$$

Par suite toute correspondance connue, contenant un paramètre z et du type

$$g(x)\, e^{-z.g(x)} \subset \Gamma(y, z),$$

fournira la connaissance de nouvelles correspondances

$$f[g(x)] \subset \int_0^\infty F(z).\Gamma(y,z)\,dz.$$

Étant donnée la fonction $g(x)$, l'équation (3) est une équation intégrale de Laplace-Abel qui peut être résolue par des moyens classiques. En particulier la solution peut être exprimée par une série entière en z dont les coefficients sont (à des facteurs numériques près) les fonctions $G_n(y)$ qui correspondent aux puissances $n^{\text{ièmes}}$ de $g(x)$, lesquelles sont connues, si l'on connaît

$$G(y) \supset g(x).$$

La transformation de $f[g(x)]$ se trouve ainsi ramenée à la connaissance des transformées de $f(x)$ et de $g(x)$.

DYNAMIQUE DES FLUIDES. — *Sur le calcul thermodynamique des caractéristiques des ondes explosives dans les mélanges gazeux.* Note [1] de M. **Numa Manson**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avons repris les calculs de Jouguet [2] relatifs aux caractéristiques des ondes explosives en tenant compte des réactions de dissociation dont les produits de combustion peuvent être le siège et en utilisant les données thermodynamiques récentes sur les gaz aux températures élevées. Les calculs ont été conduits de la manière suivante : après avoir calculé pour les produits de combustion des mélanges étudiés, les valeurs des enthalpies ΔH pour diverses températures et pressions [3], nous avons déterminé point par point l'adiabatique dynamique de ces produits en résolvant graphiquement le système d'équations

$$\Delta H_1^2 = L_p + \frac{n_1 R T_1}{2}\,\frac{\mu+1}{\mu}[\varpi - 1] \quad (^4), \qquad \varpi = \frac{n_2 T_2}{n_1 T}.$$

Ayant ensuite tracé dans un plan p, σ, l'adiabatique dynamique A, nous avons obtenu : 1° les caractéristiques de l'onde explosive, en menant par le point $p_1\sigma_1$, représentatif de l'état initial, la tangente à la courbe A ; 2° les carac-

---

(1) Séance du 27 décembre 1943.

(2) Jouguet, *Mécanique des explosifs*, Paris, 1917, p. 328; *Comptes rendus*, **181**, 1925, p. 548.

(3) Ce calcul a été fait suivant la méthode de G. Ribaud (*Chal. et Ind.*, juin-juillet 1937) pour le calcul des chaleurs totales d'échauffement.

(4) Cette équation a été déduite de l'équation donnée par Jouguet (1) dont nous adoptons les notations (p. 268, Ouv. cité) en tenant compte des relations thermodynamiques qui lient l'énergie interne U à l'enthalpie H et les pouvoirs calorifiques L_v à v const. et L_p à p const.

téristiques de la combustion à volume constant, en menant par ce point $p_1 \sigma_1$ la droite $\sigma = \text{const.}$; 3° les caractéristiques de la combustion à pression constante, en menant toujours par ce même point $p_1 \sigma_1$ la droite $p = \text{const.}$

Les mélanges étudiés étaient $H^2 + 0{,}5\,O^2 + 2{,}5\,N^2$ [*A*], $C^2H^2 + O^2 + 4N^2$ [*B*], $CO + 0{,}5\,O^2$ [*C*], $C^2H^2 + O^2$ [*D*], C^2H^2 [*E*] (5), et nous avons tenu compte des dissociations suivantes: $2H^2O \rightleftharpoons 2H^2 + O^2 - 115{,}2$ Kcal; $2H^2O \rightleftharpoons 2OH + H^2 - 128$ Kcal; $H^2 \rightleftharpoons 2H - 103{,}4$ Kcal; $O^2 \rightleftharpoons 2O - 117{,}5$ Kcal pour le mélange [*A*] (6); $2CO^2 \rightleftharpoons 2CO + O^2 - 135{,}2$ Kcal et $O^2 \rightleftharpoons 2O$ pour le mélange [*C*], et $H^2 \rightleftharpoons 2H$ pour les mélanges [*B*], [*D*] et [*E*].

Le tableau I résume les résultats de nos calculs dans les cas où les mélanges sont initialement à la pression $p_1 = 1$ atm. et à la température $T_1 = 288°K$ (7).

Tableau I.

Mélange		*A*.	*B*.	*C*.	*D*.	*E*.	
L_p Kcal/mol.		57,6	109,4	67,6	109,6	56,4	Onde explosive
T_2 °K		2720	3110	3400	4560	3350	Onde explosive
p_2 atm		15,25	21,9	16,3	50,3	23,3	Onde explosive
D_1 m/s	calc.	1820	2020	1750	2960	2070	Onde explosive
D_1 m/s	mes.	1822 (8)	2015 (10)	1740 (11)	2920 (12)	2135 (11)	Onde explosive
D_1 m/s	mes.	1840 (9)		1795 (11)	2961 (12)	2160 (11)	Onde explosive
T_2 °K		2550	2730	3270	4200	3180	V = const.
p_2 atm		7,85	11,1	9,3	24,8	11,5	V = const.
T_2 °K		2140	2240	2955	3340	2850	P = const.
				2960 (13)	3335 (14)		P = const.

Les tableaux II et III montrent l'influence de la température T_1 et de la pression p_1 initiales. En accord avec les observations (8), la célérité D_1 croît avec la pression p_1. Il est à noter que ce fait ne peut pas être mis en évidence par le calcul si l'on ne tient pas compte de la dissociation. D'ailleurs, en négligeant ce phénomène, le calcul basé sur les données récentes conduit à des valeurs D_1 qui s'écartent notablement des valeurs observées. (Nous avons ainsi calculé $D_1 = 1940$ et $D_1 = 2270$ m/sec pour les mélanges [*A*] et [*C*].)

(5) Il s'agit de la réaction de décomposition $C^2H^2 = C^2 + H^2 + 56{,}4$ Kcal.

(6) Voir abaques de R. Vichnievsky (*Thèse*, Paris, 1943).

(7) Dans le cas des mélanges [*A*], [*B*] et [*C*], Jouguet (2) avait trouvé pour D_1 les valeurs 1796, 1664 et 3091 m/s et pour T_2 2596°, 3852° et 5570°K.

(8) Dixon, *Phil. Trans.*, A, **84**, 1893, p. 97; **200**, 1903, p. 315.

(9) Wendland, *Zeits. Phys. Chem.*, **110**, 1924, p. 637; **116**, 1925, p. 227.

(10) P. Laffitte, *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 316.

(11) W. A. Bone et R. P. Fraser, *Proc. Roy. Soc.*, A, **130**, 1931, p. 342.

(12) C. Campbell, A. King et C. Whitworth, *J. Chem. Soc.*, 1933, p. 59.

(13) G. Ribaud, *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 369.

(14) Henning et Tingwaldt, *Zeits. Physik*, **48**, 1928, p. 48.

Tableau II. — *Mélange D.*

T_1 °K	288	350	500	700	288		
p_1 atm	1				5	10	
T_2 °K	4560	4490	4430	4400	4495	5250	Onde explosive
p_2 atm	50,2	39,8	27,5	19,7	255	518	
D_1 m/s	2960	2940	2920	2905	3060	3140	
T_2 °K	4200	4170	4150	4140	4530	4680	V = const.
p atm	24,8	20,1	14,1	10,1	128	263	
T_2 °K	3340	3355	3385	3430	3585	3685	P = const.

Tableau III. — *Décomposition de* C^2H^2.

T_1 °K	288	500	750	1250	288			500	
p_1 atm	1				2	3	5	2	
T_2 °K	3350	3360	3390	3505	3405	3435	3465	3400	Onde explosive
p_2 atm	23,3	13,2	8,75	5,25	46,8	70,5	117,5	26,4	
D_1 m/s	2070	2060	2050	2040	2085	2100	2110	2070	
T_2 °K	3180	3200	3245	3350	3235	3265	3290	3280	V = const.
p_2 atm	11,5	6,7	4,6	3,0	23,2	35,4	59,5	13,7	
T_2 °K	2850	2910	2985	3130	3235	3265	3290	3280	P = const.

Signalons enfin que la diminution importante de la pression p_2 des produits de combustion lors de l'accroissement de la température initiale T_1 est, d'après nos calculs, également imputable à la dissociation.

RELATIVITÉ. — *Sur la théorie des milieux doués d'une densité de moment cinétique propre.* Note (1) de M. **Olivier Costa de Beauregard.**

Des considérations abstraites nous ont permis, dans un travail sur la théorie des milieux caractérisés par un tenseur inertique T^{ij} asymétrique, de définir une congruence de lignes de *faux-courant* d'Univers, de préciser l'expression du tenseur T^{ij}, et de fixer l'indice de sommation dans le calcul de l'impulsion-masse élémentaire $T^{ij}\delta\upsilon_j$, qui est oblique sur la trajectoire d'Univers ($i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$; $ic\,\delta\upsilon_i$ désigne le quadrivecteur dual de l'élément d'intégration ternaire $[dx^j\,dx^k\,dx^l]$) (2). Nous allons établir ici ces résultats par une voie déductive et apporter des précisions nouvelles.

Les accroissements pendant le temps dt d'un élément de volume fluide $\delta\upsilon$ et d'une fonction quelconque F attachée au fluide s'écrivent respectivement,

(1) Séance du 27 décembre 1943.

(2) *Contribution à la Théorie de Dirac*, pp. 49-52 (*Thèse*, Paris, 1943).

v^u désignant la vitesse ordinaire $(u, v, w = 1, 2, 3)$

$$d\,\delta\upsilon = \partial^u v_u . \delta\upsilon\, dt, \qquad dF = (v_u \partial^u F + \partial^t F)\, dt;$$

en sorte que l'on a la formule générale

$$d(F\,\delta\upsilon) = \{\partial^u(Fv^u) + \partial^t F\}\,\delta\upsilon\, dt;$$

cette formule permet d'établir déductivement les lois relativistes de la dynamique des milieux continus qui, à la variance près des densités de masse ρ et d'énergie w, sont les mêmes qu'en théorie classique. Ici nous allons *postuler* au départ que la densité d'impulsion $\rho\vec{u}$ est oblique sur la vitesse $\vec{v}$; $\vec{f}$ désignant la densité de force pondéromotrice, il viendra les formules

$$f_u = \partial^v(\rho u_u v_v) + \partial^t(\rho u_u), \qquad (\vec{f}.\vec{v}) = \partial^u(w v_v) + \partial^t(w),$$

dont la transcription relativiste est

$$f_i = \partial^j T_{ij} \quad \text{avec} \quad cf_4 = i(\vec{f}.\vec{v})$$

et

$$T^{uv} = \rho u^u v^v, \qquad T^{u4} = ic\rho u^u, \qquad T^{4u} = \frac{i}{c} w v^u, \qquad T^{44} = -w.$$

Le tenseur T^{ij} apparaît ainsi comme le produit général du quadrivecteur *vitesse d'Univers*, du genre temps et de longueur i, $v^u = \lambda v^u$, $v^4 = ic\lambda$, par un autre quadrivecteur défini suivant

$$U^u = \frac{1}{\lambda}\rho u^u, \qquad U^4 = \frac{i}{c\lambda} w \qquad \left(\lambda = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right).$$

Dans la théorie ordinaire, la proportionnalité universelle $w = c^2\rho$ était imposée par la symétrie du tenseur T^{ij}; pour la retrouver ici, il faut *définir* la densité massique ρ en postulant que les trois u^u sont les cotangentes directrices du quadrivecteur U^i, ce qui entraîne en effet

$$U^4 = \frac{ic}{\lambda}\rho.$$

D'autre part la trace $T_i^i = U^i v_i$ du tenseur T^{ij} ayant pour expression

$$T_i^i = \rho(\vec{u}.\vec{v} - c^2),$$

l'on peut, comme en théorie ordinaire, *définir* la densité de masse propre ρ_0 par la formule $T_i^i = -c^2\rho_0$; en effet ρ_0 sera ainsi la valeur prise par ρ dans le repère galiléen entraîné $(\vec{v} = 0)$.

L'on peut évidemment postuler que l'invariant tensoriel ρ_0 est essentiellement positif; de plus, puisque $c^2\rho = -U^4 v^4$, et que $-iv^4$ est essentiellement positif, on peut postuler que $-iU^4$, et par conséquent ρ, sont essentiellement positifs; cela revient à admettre que le quadrivecteur U^i est, comme v^i, du genre

temps ([3]). Dans ces conditions, il existe un second repère galiléen objectif tel que $\rho = \rho_0$: celui dans lequel le vecteur d'espace $\vec{u}$ s'annule; de plus, on n'a pas seulement alors $|v| < c$, mais aussi $|u| < c$, et par conséquent [puisqu'en général $(\vec{u}.\vec{v})$ est susceptible de valeurs négatives]

$$-c^2 < (\vec{u}.\vec{v}) < c^2.$$

Ainsi la borne inférieure des valeurs de

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \vec{u}.\vec{v}/c^2}$$

n'est plus ρ_0, mais bien $\rho_0/2$.

Dans l'ensemble des repères galiléens relatifs à un instant-point donné, la valeur minima de $(\vec{u}.\vec{v})$ est évidemment atteinte pour une certaine direction de Ox^4 coplanaire à U^i et v^i et intérieure à l'angle de ces deux quadrivecteurs; pour les repères galiléens satisfaisant à cette condition l'on peut poser, δ désignant une constante et φ une variable réelles, $v = c.\mathrm{T}h(\varphi - \delta)$ et $u = c.\mathrm{T}h(\varphi + \delta)$; l'on voit alors sans peine que la valeur minima cherchée est

$$(\vec{u}.\vec{v}) = c^2 \frac{1 - \mathrm{ch}\,\delta}{1 + \mathrm{ch}\,\delta} \leqq 0,$$

et qu'elle est atteinte lorsque Ox^4 est bissectrice intérieure des quadrivecteurs U^i et v^i; la borne inférieure $-c^2$ des valeurs de $(\vec{u}.\vec{v})$ n'est donc atteinte que dans les cas limites $\delta = \pm\infty$. Par contre on voit sans peine que la valeur maxima de $(\vec{u}.\vec{v})$ dans les repères galiléens considérés est la borne supérieure $+c^2$.

Pour mettre en évidence la densité de masse propre ρ_0 dans l'expression de T^{ij}, il suffit de poser $u^i = U^i/c^2\rho_0$, ce qui donne

$$u^i v_i = v^i v_i = -1 \qquad \text{et} \qquad T^{ij} = c^2 \rho_0 u^i v^j.$$

Avec le tenseur T^{ij} ainsi défini l'élément d'intégrale $T^{ij}\delta v_j$ est identiquement nul sur une hyperparoi de courant d'Univers, et l'impulsion-masse d'un point matériel, oblique sur sa trajectoire d'Univers, est définie intrinsèquement.

([3]) Rappelons qu'en Théorie de Dirac les expressions de ρ_0 et de ρ ne sont pas définies positives, et que le quadri-courant de Gordon n'est pas, comme l'est celui de Dirac, nécessairement du genre temps (*op. cit.*, pp. 29, 74, 89).

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur la représentation des interactions massiques par l'intermédiaire des ondes longitudinales de la théorie de la particule de spin* $2(h/2\pi)$. Note [1] de M. **Gérard Petiau.**

Nous avons montré [2] que l'élément de matrice correspondant à une transition $(l, m) \rightarrow (o, m')$ du système particule de spin $1/2(h/2\pi)$ — particule de spin $2(h/2\pi)$ (graviton) pouvait s'écrire sous la forme

$$(1)\quad H^{(1)}_{om',lm} = \int_{v} \left\{ l(T_{\alpha\beta})_{m'm} \Phi^{\alpha,\beta}_{\vec{k}_l}(\vec{r}) + m(T_{\alpha\beta.\gamma})_{m'm} \Phi^{\alpha\beta,\gamma}_{\vec{k}_l}(\vec{r}) + n(T_{\alpha\beta,\gamma})_{m'm} \Phi^{\alpha\beta,\gamma\delta}_{\vec{k}_l}(\vec{r}) \right\} dv.$$

Nous allons calculer explicitement cet élément de matrice en nous bornant aux termes en l et aux potentiels $\Phi^{\alpha,\beta}$ longitudinaux. Les $(T_{\alpha.\beta})_{m',m}$ sont ici les densités des composantes du tenseur symétrique de Tétrode modifié

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{h}{4\pi i}\left[u_\alpha \underset{\rightarrow}{\partial_\beta} - \underset{\leftarrow}{\partial_\beta} u_\alpha + u_\beta \underset{\rightarrow}{\partial_\alpha} - \underset{\leftarrow}{\partial_\alpha} u_\beta \right] + \frac{m_0 c}{2} g_{\alpha\beta}\,\omega = T'_{\alpha,\beta} - \frac{m_0 c}{2} g_{\alpha\beta}\,\omega;$$
$$T^{\alpha}_{\alpha} = 0\,(g^{00} = 1,\ g^{pp} = -1;\ \omega = \alpha_4;\ u^0 = u_0 = \alpha_0 = 1;\ u_p = -u^p = \alpha_p).$$

A partir des solutions de l'équation d'ondes du corpuscule de spin 2, on forme les expressions des potentiels longitudinaux normés

$$\Phi^{0,0} = \frac{2C|\vec{k}|^2 P}{\sqrt{\mu_0^3 k v}};\qquad \Phi^{0,3} = \frac{2Ck\vec{k}P}{\sqrt{\mu_0^3 k v}};\qquad \Phi^{3,3} = \frac{2Ck^2 P}{\sqrt{\mu_0^3 k v}};\qquad P = e^{i(kct - |\vec{k}|z)}.$$

L'élément de matrice (1) s'écrit alors

$$(2)\quad H^{(1)}_{om',lm} = \frac{2Cl}{\sqrt{\mu_0^3 k v}} \int \Big\{ t'_{00}|\vec{k}|^2 + t'_{0,3}\, k\,|\vec{k}| + t'_{3,3} k^2 + \frac{m_1 c}{2}\mu_0^2\,\omega \Big\} e^{i\{[k + K_m - K_{m'}]ct - [\vec{k} + \vec{K}_m - \vec{K}_{m'}]z\}}\, dv.$$

C représente la constante de proportionnalité des potentiels aux ondes Φ_{i_1,i_2,i_3,i_4}, les $t'_{\alpha,\beta}$ sont les éléments de matrices raccourcis correspondant aux $(T'_{\alpha\beta})_{m'm}$.

La formule (2) montre que la probabilité de la transition ne peut être différente de zéro que si $\vec{k} = \vec{K}_{m'} - \vec{K}_m$, c'est-à-dire s'il y a conservation de la quantité de mouvement, mais alors, il n'y a pas conservation de l'énergie. Il faudra donc considérer deux transitions simultanées formant un processus global conservant à la fois l'énergie et la quantité de mouvement et dont l'élément de matrice s'écrit

$$H'_{i,f} = \sum_p \frac{H^{(1)}_{ip} H^{(1)}_{pf}}{E_i - E_p}.$$

Nous allons calculer cet élément suivant le schéma indiqué par M. Louis de Broglie [3] pour les interactions s'exerçant par échange de photons. Nous

---

[1] Séance du 27 décembre 1943.

[2] *Comptes rendus*, 217, 1943, p. 103.

[3] *Une nouvelle théorie de la lumière*, 2, p. 117.

devrons considérer deux façons de réaliser l'échange d'énergie et de quantité de mouvement considéré.

Dans le premier processus, la particule (1) passe de l'état (01) $\left(\vec{K}_{01}, \vec{K}_{01}\right)$ à l'état (1) $\left(\vec{K}_{1}, \vec{K}_{1}\right)$ en cédant la quantité de mouvement $\vec{k}$ à l'onde longitudinale $\left(k, \vec{k}\right)$ du graviton qui est ensuite absorbé par la particule (2) qui passe de l'état (02), $\left(K_{02}, \vec{K}_{02}\right)$ à l'état (2) $\left(K_{2}, \vec{K}_{2}\right)$. On a alors

$$\vec{K}_{01} - \vec{K}_1 = \vec{k}; \quad \vec{K}_{02} + \vec{k} = \vec{K}_2; \quad K_{01} - K_1 = K_2 - K_{02} = K; \quad K_i - K_p = K - k.$$

D'autre part la relation de la théorie de Dirac $\partial_\alpha (T'^{\alpha\beta})_{m'm} = 0$ donne ici

$$K(t_{0.\beta})_{m'm} = \left|\vec{k}\right| (t_{3.\beta})_{m',m}.$$

Le même échange global peut également s'effectuer suivant un second processus inverse du premier. La particule (2) passant de l'état (02) $\left(K_{02}, \vec{K}_{02}\right)$ à l'état $\left(K_{2}, \vec{K}_{2}\right)$ en cédant la quantité de mouvement $-\vec{k}$ au graviton qui est ensuite absorbé par la particule (1) qui passe de (01) $\left(K_{01}, \vec{K}_{01}\right)$ à l'état (1) $\left(K_{1}, \vec{K}_{1}\right)$, d'où

$$\vec{K}_{02} - \vec{K}_2 = -\vec{k}; \quad \vec{K}_{01} - \vec{k} = \vec{K}_1; \quad K_{01} - K_1 = K_2 - K_{02} = K; \quad K_i - K_p = -(K + k).$$

Si l'on remarque que, en première approximation, on peut négliger dans l'élément de matrice les termes en K, ce qui revient à négliger la perturbation du mouvement des nucléons par les gravitons et si les corpuscules sont suffisamment voisins du repos, nous avons

$$t'^{(1)}_{0,0} = \frac{h}{2\pi}(K_{01} + K_1)(1)_{1.01} \approx 2 m_1 c (1)_{1,01}; \quad \omega^{(1)} \approx (1)_{1,01}$$

et l'élément de matrice global se réduit à

$$H^{(1)}_{i,f} = {}_{(1)}H^{(1)} + {}_{(2)}H^{(1)} = \frac{8 C^2 l^2 2\pi}{\mu_0^3 v h c} \frac{1}{(K^2 - k^2)} \left[2\left|\vec{k}\right|^2 + \frac{\mu_0^2}{2}\right]^2 m_1 m_2 c^2 (1)_{1,01}(1)_{2,02}.$$

Prenant pour C^2 la valeur de la théorie du photon $C^2 = hc/8\pi\mu_0$, il vient

$$H^{(1)}_{if} = -\frac{2 l^2 c^2}{\mu_0^4 v}\left[4\left|\vec{k}\right|^2 - 2\mu_0^2 + \frac{9\mu_0^4}{4k^2}\right] m_1 m_2 (1)_{1.01}(1)_{2,02}.$$

Or on montre, dans la théorie du photon, que l'élément de matrice $(1/v)(1/k^2)(1)_{1,01}(1)_{2,02}$ correspond au potentiel $(1/4\pi)\left(e^{-\mu_0\left|\vec{r}_{12}\right|}/\left|\vec{r}_{12}\right|\right)$ et que $(1/v)(1)_{1,01}(1)_{2,02}$ correspond au potentiel de coïncidence $\delta\left(\left|\vec{r}_{12}\right|\right)$. D'autre part, on voit facilement que le terme en $\left|\vec{k}\right|^2$ correspond au potentiel $-\delta''\left(\left|\vec{r}_{12}\right|\right)$, la fonction singulière $\delta''\left(\vec{r}\right)$ étant telle que $\int f\left(\vec{r}\right)\delta''\left(\vec{r}\right) d\vec{r} = f''(0)$. L'élément de matrice $H^{(1)}_{i,f}$ est donc équivalent à celui correspondant au

potentiel

$$V(|\vec{r}_{12}|) = - m_1 m_2 \frac{(9 l^2 c^2)}{8\pi} \frac{e^{-\mu_0(r_{12})}}{|\vec{r}_{12}|} + 4 m_1 m_2 l^2 c^2 \left[\frac{\delta(|\vec{r}_{12}|)}{\mu_0^2} + \frac{2\,\delta''(|\vec{r}_{12}|)}{\mu_4^0} \right],$$

c'est-à-dire, en posant $9l^2c^2/8\pi = k$, constante de Newton, au potentiel newtonien, corrigé par un terme exponentiel qui, en raison de la faible valeur probable de μ_0, n'exerce pas d'action appréciable sauf aux distances très grandes, et complété par deux termes de coïncidence.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur dix relations conséquences des équations du second ordre de Dirac.* Note (¹) de M. **Émile Durand.**

On part des équations du second ordre de Dirac

$$(1) \qquad \{ \gamma_0 B - i\varepsilon\gamma_{pq} R^{pq} \} \psi = 0,$$

$$(2) \qquad \psi^{\times} \{ \gamma_0 B^{\star} - i\varepsilon\gamma_{pq} R^{pq} \} = 0,$$

où l'on a posé

$$B = \overleftarrow{\partial}{}^p_p - 2i\varepsilon A^p \overleftarrow{\partial}_p - \varepsilon^2 A_p A^p - k_0^2, \qquad \varepsilon = \frac{2\pi e}{ch}, \qquad R^{pq} = \partial^p A^q - \partial^q A^p,$$

$$B^{\star} = \overleftarrow{\partial}{}^p_p + 2i\varepsilon A^p \partial_p - \varepsilon^2 A_p A^p - k_0^2, \qquad k_0 = \frac{2\pi m_0 c}{h}, \qquad \psi^{\times} = i\psi^{\star}\gamma_4.$$

Après avoir multiplié (1) en avant par $\psi^{\times}\gamma^{A}$ et (2) en arrière par $\gamma^{A}\psi$, on somme sur l'indice k des fonctions ψ; γ^{A} désigne l'une des 16 matrices de la théorie de Dirac.

En choisissant successivement les γ^{A} dans les 5 rangs tensoriels 0, 1, 2, 3, 4 on fera apparaître 10 relations qui auront évidemment le caractère tensoriel; il n'y a plus qu'à les combiner par addition et soustraction pour obtenir les relations cherchées.

Voyons quelle sera la contribution apportée par les termes contenant les opérateurs B et B*; si l'on pose

$$[\gamma^{A}] = [\psi^{\times}\gamma^{A}\psi],$$
$$T^{A,p} = \{ [\partial^p \psi^{\times}\gamma^{A}\psi] - [\psi^{\times}\gamma^{A}\partial^p\psi] \} + 2i\varepsilon A^p[\gamma^{A}],$$

on a

$$\psi^{\times}\{\gamma^{A}(B^{\star} + B)\}\psi = \partial^p_p[\gamma^{A}] - 2[\partial^p\psi^{\times}\gamma^{A}\partial_p\psi] + 2i\varepsilon A^p T^{A,p} + 2[\gamma^{A}](\varepsilon^2 A_p A^p - k_0^2)$$
$$\psi^{\times}\{\gamma^{A}(B^{\star} - B)\}\psi = \partial_p T^{A,p}.$$

Les 10 relations cherchées du second ordre s'écrivent ($\overline{A}$ désignant la grandeur

---

(¹) Séance du 27 décembre 1943.

duale de A)

(1) $\psi^{\times}\{\gamma^0\ (B^{\star}+B)\}\psi = 2i\varepsilon\ [\gamma_{pq}]R^{pq}$,

(2) $\psi^{\times}\{\gamma^p\ (B^{\star}+B)\}\psi = 2i\varepsilon\ [\bar{\gamma}_q]\bar{R}^{pq}$,

(3) $\psi^{\times}\{\gamma^{pq}(B^{\star}+B)\}\psi = 2i\varepsilon\{[\bar{\gamma}_0]\bar{R}^{pq}-[\gamma_0]R^{pq}\}$,

(4) $\psi^{\times}\{\bar{\gamma}^p\ (B^{\star}+B)\}\psi = 2i\varepsilon\ [\gamma_q]\bar{R}^{pq}$,

(5) $\psi^{\times}\{\bar{\gamma}^0\ (B^{\star}+B)\}\psi = -2i\varepsilon\ [\bar{\gamma}_{pq}]R^{pq}$,

(6) $\partial_p T^{0,p} = 0$,

(7) $\partial_q T^{p,q} = -2i\varepsilon\ [\gamma_q]\ R^{pq}$.

(8) $\partial_r T^{pq,r} = -2i\varepsilon\{[\gamma^{pr}]R^q{}_r - [\gamma^{qr}]R^p{}_r\}$,

(9) $\partial_q T^{\bar{p},q} = -2i\varepsilon\ [\bar{\gamma}_q]\ R^{pq}$,

(10) $\partial_p T^{\bar{0},p} = 0$.

Dans le second membre de l'équation (8) on reconnaît, à un coefficient numérique près, la densité de moment pondéromoteur d'Univers propre appliquée au fluide fictif de Dirac par le champ; d'où l'idée, assez naturelle, de choisir les coefficients physiques du tenseur abstrait $T^{pq,r}$ de manière que sa divergence s'identifie avec la densité de moment pondéromoteur, en posant

$$T^{pq,r} = -\left(\frac{4\pi}{h}\right)^2 i\, m_0\, t^{pq,r};$$

(8) s'écrit alors

$$\partial_r t^{pq,r} = m^{pr}R^q{}_r - m^{qr}R^p{}_r.$$

Rappelons, par le tableau suivant, l'interprétation physique que reçoivent les différents tenseurs de la théorie de Dirac :

$$[\gamma^0] = -\frac{m_0}{i}\rho_0 = -i\omega_1, \qquad T^{0,p} = -\frac{2k_0}{ec}t^{0,p},$$

$$[\gamma^p] = -\frac{1}{ec}J^p = \frac{1}{c}f^p, \qquad T^{p,q} = \frac{4\pi i}{ch}t^{p,q},$$

$$[\gamma^{pq}] = \frac{2k_0}{e}m^{pq}, \qquad T^{pq,r} = -\left(\frac{4\pi}{h}\right)^2 i m_0 t^{pq,r},$$

$$[\bar{\gamma}^p] = -\frac{4\pi}{h}\sigma^p, \qquad T^{\bar{p},q} = ?,$$

$$[\bar{\gamma}^0] = -\omega_2, \qquad T^{\bar{0},p} = \frac{2k_0}{iec}t^{\bar{0},p};$$

$t^{0,p}$ est le courant de Gordon, $t^{p,q}$ le tenseur asymétrique de Tétrode, $t^{\bar{0},p}$ le courant magnétique de Proca.

Les équations (6) et (10) expriment la conservation des courants $t^{0,p}$ et $t^{\bar{0},p}$. L'équation (7) obtenue d'une manière différente par Tétrode lui avait permis de doter son tenseur des coefficients physiques nécessaires; au second membre on reconnaît la densité de force-puissance de Lorentz quand on l'écrit

$$\partial_q t^{p,q} = \frac{1}{c}J_q R^{pq}.$$

Enfin M. O. Costa de Beauregard a calculé les deux divergences du

tenseur $T^{p,q}$, qui reste ininterprété; il a même fourni des indications pour le calcul de sa divergence relative à l'indice différentiel à l'aide des équations du second ordre de Dirac (*Thèse*, p. 85).

Les cinq premières équations ont des seconds membres qui sont moins directement interprétables; dans la relation (1) on reconnaît cependant la densité d'énergie potentielle.

ASTRONOMIE. — *Sur le satellite de Neptune.* Note de MM. **Henri Camichel** et **Alexandre Dauvillier**, présentée par M. Charles Fabry.

En 1928, J. H. Moore et D. H. Menzel [1] ont découvert, par la spectrographie, que la planète Neptune était animée d'un mouvement de rotation dans le sens direct, alors que son satellite possède un mouvement de révolution rétrograde.

L'importance cosmogonique de cette observation n'a pas besoin d'être soulignée. Si l'on ajoute que ce satellite est anormalement gros pour la masse de la planète et que son orbite est inclinée de 19° sur le plan équatorial de celle-ci, on admettra aisément qu'il s'agit d'un corps céleste capté.

Ce satellite est, en effet, démesuré pour la taille de sa planète. Il atteint celle des plus gros satellites de Jupiter, alors que la masse de Neptune n'est que 1/18 de celle de cette planète. Les satellites d'Uranus sont beaucoup plus petits, bien qu'Uranus et Neptune soient très voisins. Il est, enfin, unique, alors que les satellites des grosses planètes semblent former des familles homogènes de quatre ou cinq membres.

D'autre part Pluton est la plus petite planète du système solaire, et son orbite présente une inclinaison (17°7′) et une excentricité (0,246) considérables, à tel point que, au périhélie, sa distance au Soleil est voisine de celle de Neptune.

L'un de nous [2] a récemment proposé une hypothèse cosmogonique nouvelle, basée sur la création initiale de paires de planètes jumelles ayant ultérieurement fusionné, qui rendrait compte des caractères exceptionnels de l'orbite de Pluton, si l'on admettait que cette planète représente effectivement l'une des deux planètes Pluton originelles qui, par suite de leur faible masse et de la grandeur de leurs orbites, ne se seraient jamais rencontrées. Nous supposions alors que la seconde planète Pluton demeurait encore à découvrir. L'objet de la présente Note est d'indiquer les raisons qui nous font penser que cette planète pourrait fort bien être devenue le satellite de Neptune.

Ce satellite devrait, dans cette hypothèse, être identique à Pluton. Or les masses de ces deux corps célestes sont des plus incertaines, et seules leurs magnitudes sont connues. D'après F. Baldet [3], la magnitude de Pluton était

(1) *Publ. Astr. Soc. Pac.*, **40**, 1928, p. 234.
(2) A. Dauvillier, *Comptes rendus*, **214**, 1942, p. 786.
(3) *Astr.*, **46**, 1932, p. 353.

comprise entre 14,5 et 15 à l'époque de sa découverte. Si nous ramenons cette planète à la distance de Neptune, le calcul montre que sa magnitude devra être réduite de 1,46 grandeur, soit à environ 13,5. Or la magnitude du satellite de Neptune est égale à 13,6.

Ces deux corps célestes, formés, selon nous, de gaz légers solidifiés, sont de trop faible masse pour pouvoir retenir une atmosphère permanente : ils s'évaporent même lentement. Or Slipher a montré que Pluton présentait une anomalie spectroscopique dans la famille des grosses planètes, en ce sens qu'il ne possédait aucune bande d'absorption d'origine atmosphérique.

D'autre part W. H. Pickering a montré, en 1900, que la lumière du satellite de Neptune était beaucoup plus actinique que celle issue de sa planète, ce qui semble aussi dénoter une absence d'atmosphère.

L'inclinaison de l'orbite de Pluton fait que cette planète ne saurait, de nos jours, rencontrer Neptune, mais on peut admettre que cette inclinaison a été acquise peu à peu, sous l'influence perturbatrice des grosses planètes agissant sur des orbites primitives non rigoureusement coplanaires et que, à l'origine, les orbites elliptiques des planètes Pluton étaient sensiblement dans le même plan que l'orbite quasi-circulaire de Neptune.

Enfin nous rapprocherons de cette hypothèse nouvelle, concernant l'origine du satellite exceptionnel de Neptune, le cas du satellite anormal de Saturne que constitue Titan. Celui-ci, qui est le sixième, se distingue aussi par sa masse anormalement grande et, surtout, par le fait qu'il n'obéit pas à la loi exponentielle de distance à la planète. Sa densité, mal connue, semble être très supérieure (3,4) à celle de Saturne (0,7), si bien qu'il doit aussi être considéré comme un satellite capté.

Nous pensons que Titan est la planète jumelle de celle qui, gravitant à l'origine entre Mars et Jupiter, a été rompue en donnant, d'après Olbers, naissance aux petites planètes. Ces deux planètes, de très faible masse, étaient arrivées au terme de leur évolution chimique et minéralogique lorsque, par suite d'une tardive rencontre, les forces de marée mises en jeu par leur proximité disloquèrent l'une d'elles. La seconde, s'échappant alors de son orbite, fut captée par l'une des grosses planètes et devint Titan.

Si ces attributions se confirmaient, elles constitueraient un argument de plus en faveur de la théorie des planètes jumelles.

CHALEUR. — *Formes diverses de l'équation de la chaleur. Équation intrinsèque.* Note (¹) de M. **Pierre Vernotte**, présentée par M. Aimé Cotton.

Les grandeurs physiques figurant dans nos équations dépendent en général de la température, et il en résulte simplement, dans les résultats, une légère

---

(¹) Séance du 13 décembre 1943.

complication, ou un caractère légèrement variable des paramètres. Mais, quand il s'agit de phénomènes *thermiques*, en particulier de ceux qui sont régis par des équations formellement analogues à celles que l'on rencontre dans d'autres branches de la Physique, la *température* n'étant plus un simple paramètre, mais la *grandeur fondamentale* même à évaluer, le caractère mathématique, et donc physique, du problème, est complètement changé. C'est ainsi que l'équation de la chaleur (sans second membre, pour simplifier)

$$\mathrm{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)-c\rho\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}=0$$

est profondément *différente* de l'équation du potentiel électrique, du fait de la variabilité notable de la conductivité K avec la température (surtout avec les gaz et certains métaux ou alliages).

Remarquons d'abord que les relations différentielles exprimant que K ne dépend que de la température permettent de poser, W étant une fonction de V,

$$(1)\qquad \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}=\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x},\qquad \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}=\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y},\qquad \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}=\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z},\qquad \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}=\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}.$$

Le flux unitaire Φ de la chaleur dérive donc d'un potentiel.

L'équation de la chaleur se formule alors comme l'équation du potentiel électrique

$$(2)\qquad \Delta \mathrm{W}=\frac{c\rho}{\mathrm{K}}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}.$$

Le flux de chaleur est, au signe près, le flux du gradient W. W pourrait être appelé le *potentiel de la chaleur*.

On peut aller plus loin. Pour avoir une propriété intrinsèque de la diffusion de la chaleur, ne dépendant plus des propriétés d'aucun milieu, on observe que, d'après (2), la diffusivité $\mathrm{K}:c\rho$, laquelle n'est fonction que de W (par V), est donnée par $(\mathrm{W}'_t:\Delta\mathrm{W})$. En exprimant que cette expression n'est fonction que de W, on obtient l'équation intrinsèque de la chaleur

$$(3)\qquad \Delta\,\mathrm{grad}\,\mathrm{W}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Delta \mathrm{W}}{\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{W}\right).$$

Si l'on explicite le flux de chaleur Φ, l'équation s'écrit

$$\Delta\Phi=\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\Phi\,\mathrm{div}\,\Phi}{\int_n \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,dn}.$$

La détermination, en fonction de la température, de la conductivité K, est un des problèmes expérimentaux importants de la thermique; le calcul de la fonction K(V), à partir de données expérimentales, est un des problèmes

importants de la théorie de la chaleur. Ce calcul est la principale application de l'équation intrinsèque de la chaleur.

Il s'agit de déterminer, en une seule expérience, la loi K(V). On s'appuie sur des mesures faites par notre méthode du double mur. Deux disques identiques du métal en expérience, horizontaux, d'épaisseur l, enserrent, entre eux, un chauffoir électrique de quelques centièmes de millimètre d'épaisseur, et deux radiateurs, donnant en même temps une protection latérale, déversent à l'extérieur la chaleur qui a traversé les disques. Pour expliquer le principe de l'expérience, simplifions, et considérons qu'au contact du chauffoir les deux disques ont la même température A_0, qui sera mesurée en fonction du temps. On mesurera aussi, en fonction du temps, les différences δ_1 et δ_2 entre cette température et les températures des faces non chauffées des disques. Le problème est à une dimension x. (Le matériel expérimental avait été réalisé en vue d'une procédure voisine de celle-là.)

On porte, assez rapidement, les disques à la température la plus haute qu'il s'agit d'explorer, puis on réduit le chauffage, pour permettre aux disques de se refroidir assez lentement; et l'expérience commence.

On se donne les températures V_1 et V_2, les différences δ_1 et δ_2, les *potentiels* W_1 et W_2, par les développements

$$(4)\qquad V_1 = A_0 - A_1 x + A_2 x^2 \ldots, \qquad V_2 = B_0 - B_1 x + B_2 x^2 \ldots,$$

$$(5)\qquad \delta_1 = A_1 - A_2 l' + A_3 l^2 \ldots, \qquad \delta_2 = B_1 - B_2 l + B_3 l^2 \ldots,$$

$$(6)\qquad W_1 = C_0 - C_1 x + C_2 x^2 \ldots; \qquad W_2 = D_0 - D_1 x + D_2 x^2 \ldots.$$

Les A, B, C, D sont des fonctions du temps. On est censé connaître la capacité calorifique $c\rho$ du métal aux températures A_0, ce qui fixe C_2 et D_2. $C_1 + D_1 = P$ est donné par la puissance du chauffoir. La conductivité K étant donnée par $C'_0 : A'_0$, ou $D'_0 : A'_0$, on exprime que les deux métaux sont identiques en écrivant $D'_0 = C'_0$. On satisfait aux équations (1) en écrivant que $V'_x : W'_x = V'_t : W'_t$, pour chaque disque (7). Enfin on forme, pour chaque milieu, l'équation (3) [relations (8)].

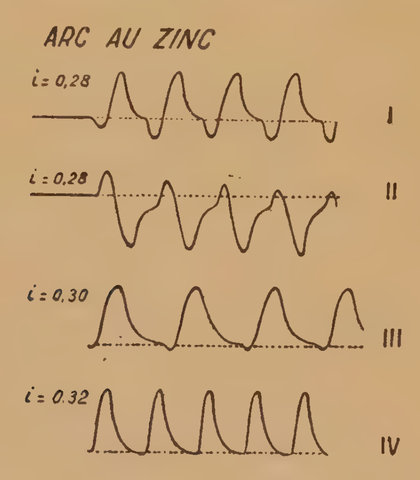
Les relations (8) expriment les C, à partir de C_3, au moyen de C_2, qui est connu, de C'_0, et de C_1, et aussi les D, à partir de D_3, au moyen de D_2 (connu), de $D'_0 = C'_0$, et de D_1. Le système (7) donne C_1 en fonction de C'_0 et A_1, et de même D_1, par C'_0 et B_1. $(C_1 + D_1)$ étant connu, cela nous exprime C'_0 en fonction de A_1 et B_1. Le système (7) donne ensuite les A, à partir de A_2, au moyen de A_1, et des C; et de même, les B, à partir de B_2, au moyen de B_1 et des D. Finalement, en portant dans (5) les expressions des A et des B, on a deux relations, à résoudre par approximations successives (1[re] approximation : $A_1 \sim \delta_1$; $B_1 \sim \delta_2$) donnant les deux inconnues A_1 et B_1, d'où C'_0 comme on l'a dit, et par suite $K = C'_0 : A'_0$.

Des considérations analogues pourraient être développées à propos du ferromagnétisme, la perméabilité dépendant fortement du champ magnétique.

ÉLECTROTECHNIQUE. — *Arc alternatif intermittent à polarité constante.* Note (1) de M. **Léon Grillet**, présentée par M. Aimé Cotton.

J'ai décrit un arc intermittent à fonctionnement automatique utilisant le courant alternatif industriel sous 110-115 volts (2). J'ai signalé qu'il est possible de supprimer entièrement l'une des alternances par le simple réglage de la résistance mise en série avec l'arc. L'arc se trouve ainsi alimenté en courant redressé.

La figure reproduit le calque d'oscillogrammes obtenus avec un arc



éclatant entre électrodes de zinc pour différents régimes du courant. Les courbes I et II correspondent sensiblement à la même valeur du courant i. Sur ces courbes on peut constater que le régime définitif est atteint dès les premières alternances du courant alternatif. Des enregistrements successifs n'ont montré aucune modification dans l'allure des courbes. En comparant ces deux courbes, qui sont très voisines de forme (même régime de courant, $i = 0{,}28$ ampère), on constate qu'elles sont symétriques par rapport à l'axe des temps représenté en pointillé. C'est la phase de la fermeture du circuit qui impose d'une façon définitive la polarisation partielle du courant.

Les courbes III et IV correspondent respectivement à des intensités de 0,30 et 0,32 ampère. Elles montrent la disparition progressive, puis complète, de l'une des alternances. Pour une valeur de i très légèrement supérieure à 0,32 ampère, l'arc est alimenté en courant redressé.

Dans l'arc que j'ai décrit l'une des électrodes est fixe, l'autre est mobile. Il est intéressant de pouvoir obtenir à coup sûr, comme cathode, l'électrode fixe. Pour obtenir la polarité désirée il faut soit provoquer la fermeture du circuit

---

(1) Séance du 13 décembre 1943.

(2) *Comptes rendus*, **216**, 1943, pp. 724-725.

à une phase bien déterminée, soit introduire *temporairement* une dissymétrie dans le circuit. Ce deuxième procédé est le plus simple; c'est celui que j'ai adopté. Le dispositif le plus économique consiste à disposer un redresseur aux bornes de l'ensemble arc-bobine. J'utilise à cet effet un condensateur électrolytique d'une dizaine de microfarads mis en série avec une résistance ajustable. Ce circuit auxiliaire n'est employé que pendant un court instant au moment de l'allumage de l'arc. Il n'a une action que lorsque la valeur du courant de régime correspond au redressement. En branchant le condensateur électrolytique par l'intermédiaire d'un inverseur, il est naturellement possible de changer à volonté la polarité des électrodes.

Pour vérifier que le régime redressé est atteint, il est inutile d'employer un oscillographe. Il suffit de shunter l'ensemble bobine-résistance par une lampe veilleuse au néon à électrodes bien symétriques. Quand le redressement est obtenu, seule l'électrode qui joue le rôle de cathode est très lumineuse.

PHOTOÉLECTRICITÉ. — *Mesure photoélectrique des facteurs de transmission et de réflexion régulières.* Note de M. **Jean Terrien**, présentée par M. Albert Pérard.

La mesure du facteur de transmission des lames planes semi-transparentes et des facteurs de réflexion sur chacune de leurs faces est une opération difficile à réaliser avec quelque précision. Nous avons construit un appareil qui permet de l'exécuter rapidement, par une méthode photoélectrique.

Voici les caractéristiques principales de cet appareil :

1° Grande luminosité, afin de simplifier la partie photoélectrique. On obtient ce résultat par la brillance de la source, qui est un filament de lampe, et l'étendue du faisceau utile, qui est délimité par la source de lumière et la surface sensible d'une cellule. Lorsqu'aucune lame n'est interposée, celle-ci reçoit l'éclairement qui existerait à 40^{cm} de la lampe.

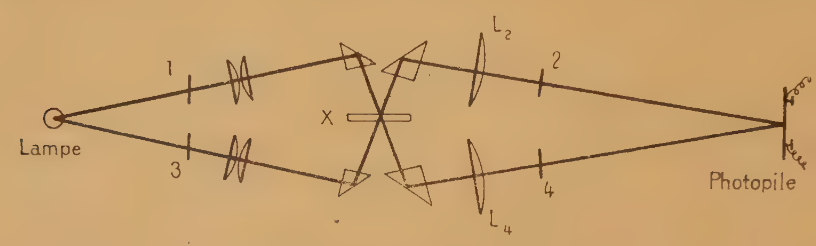
2° Surface d'étude petite : sur la lame se projette, en vraie grandeur, l'image d'un filament ramassé.

3° Suppression des erreurs provenant de la variation de distance optique entre lampe et récepteur, tant à cause de l'épaisseur de la lame que des réflexions multiples entre ses faces; pour cela, dans l'espace optique où se trouve la lame, on rejette la cellule à l'infini au moyen d'une lentille.

4° Immobilité de la source et du récepteur de lumière au cours des trois mesures, grâce à la disposition ci-après (voir la figure).

On envoie sur la lame X, sous une incidence voisine de la normale, deux faisceaux symétriques provenant de la même lampe; la partie réfléchie du premier coïncide avec la partie transmise du second, et *vice versa*. Par le jeu de deux obturateurs 1 et 3, on arrête l'un des faisceaux incidents; deux autres

obturateurs 2 et 4 permettent d'isoler la partie réfléchie ou transmise; la lumière parvient finalement à la même cellule. Sans modifier le montage, on



X, lame semi-transparente, sur laquelle se forme l'image de la lampe; 1, 2, 3, 4, obturateurs. La photopile est au foyer de L_2 et L_4.

isole donc les flux réfléchis sur l'une ou l'autre face, ou transmis dans l'un ou l'autre sens, et, après avoir écarté la lame, les faisceaux directs.

On mesure les éclairements correspondants par les déviations du galvanomètre connecté à la cellule. Celle-ci est une photopile au sélénium, et la partie photométrique est ainsi simplifiée à l'extrême.

Mais on sait qu'une photopile quelconque ne donne pas toujours un courant proportionnel à l'éclairement, même si ce dernier reste modéré, et si la résistance du circuit est petite; il est donc indispensable de prévoir un contrôle. Celui-ci est particulièrement facile avec notre appareil; en effet, on peut superposer sur la photopile, par le jeu des obturateurs, quatre éclairements différents, seuls ou combinés de plusieurs façons, et vérifier l'additivité des courants photoélectriques partiels. Cette méthode d'addition pour l'étude de la proportionnalité du courant à l'éclairement semble être la plus sûre, et on l'applique dans les conditions d'emploi. Elle permettrait d'ailleurs le calcul de corrections (¹), si la précision était jugée insuffisante. Elle constitue aussi un contrôle du galvanomètre, dont les déviations pourraient n'être pas proportionnelles aux courants.

La précision atteinte sans corrections peut dépasser le centième.

Voici, à titre d'exemple, l'étude d'une lame interférentielle semi-aluminée; R est le facteur de réflexion air-métal, R′ verre-métal, et T le facteur de transmission. Ces facteurs ont été mesurés aussitôt après le dépôt de la couche métallique, puis après les durées indiquées; on peut suivre l'influence de l'oxydation progressive de l'aluminium.

Age de l'aluminure.	R.	R′.	T.
0	0,32	0,21	0,32
4 heures	$0,27_5$	0,14	0,37
21 »	$0,25_5$	0,14	0,38

Pendant ces mesures les faisceaux réfléchis plusieurs fois sur les deux faces

(¹) PIERRE FLEURY, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 195.

de la lame passent librement dans les pièces d'optique, dont l'ouverture a été prévue suffisamment grande, et contribuent à l'éclairement de la cellule. Les facteurs ci-dessus, relatifs à la seule face métallisée, ont été déduits des facteurs mesurés par un calcul simple.

PHOTOGRAPHIE. — *Influence de l'humidité dans l'action du mercure sur les émulsions photosensibles.* Note de MM. **Adrien Roudier** et **Étienne Vassy**, présentée par M. Charles Fabry.

L'action des vapeurs mercurielles sur les émulsions photosensibles est connue depuis 1907, à la suite des recherches de Kof et Haehn [1]. Perdue de vue pendant un certain temps, elle a été très étudiée ces dernières années, dans le but pratique de raccourcir les durées d'exposition. Mais les résultats que l'on rencontre dans la littérature sont contradictoires, certains auteurs [2] ayant parfois constaté une désensibilisation au lieu d'une sensibilisation. C'est pourquoi nous avons repris ces recherches et nous avons été conduits à faire varier, entre autres facteurs, l'humidité relative de l'atmosphère dans laquelle avait lieu le traitement mercuriel.

Le dispositif expérimental était le suivant : Trois dessiccateurs A, B et C étaient disposés dans une enceinte obscure et de température réglable. Dans chacun d'eux se trouvait un mélange de Regnault (eau-acide sulfurique) et, en agissant sur les proportions relatives, on pouvait amener l'atmosphère à un état hygrométrique fixé à l'avance. Pour opérer en l'absence de vapeur d'eau, on remplaçait le mélange de Regnault par du chlorure de calcium. Dans le dessiccateur B se trouvait en outre du mercure.

La plaque à étudier était abandonnée en A pendant 24 heures pour lui permettre d'atteindre l'équilibre hygrométrique. Ensuite on la coupait en deux. Une moitié restait en A pour servir de témoin; l'autre était introduite en B et y subissait l'action du mercure pendant le temps voulu. Les deux moitiés de la plaque étaient alors exposées à la lumière. L'étalonnage avait lieu à éclairement constant. Après l'exposition on replaçait l'échantillon témoin en A et l'échantillon traité en C de façon à éviter d'introduire des traces de mercure en A. Le développement était effectué 24 heures après la fin de l'exposition.

Une pareille technique opératoire était utilisée afin d'isoler l'action de l'humidité en présence de mercure, car on sait qu'une couche sensible desséchée ou trop humide se développe plus difficilement que lorsque sa teneur en eau est normale.

Nous avons constaté tout d'abord que l'action du mercure était beaucoup

---

(1) *Zeits. physik. Chem.*, 60, 1907, p. 367.

(2) Whipple, Norman et Loewinger, *Bull. Harvard Obs.*, n° 907, 1938, p. 36; *English, Amer. Phot. Journ.*, 33, 1939, p. 90; Emmerman, *Brit. Phot. Journ.*, 84, 1940, p. 440.

plus intense pour des émulsions rapides à gros grains comme les Guilleminot Super Fulgur que pour des émulsions à grains fins type Process. Pour une durée de traitement mercuriel de 4 jours à la température de 19°C., la *sensibilisation passe par un maximum lorsqu'on fait croître l'humidité relative*. Ce maximum est situé aux environs de 50 % pour les Super Fulgur. Si l'on approche de la saturation, on constate alors, pour ces dernières plaques, une *désensibilisation* très importante, tandis que les Process conservent encore une très légère sensibilisation. De plus la densité du voile augmente avec l'humidité relative.

Nous avons constaté que les résultats obtenus dépendaient en outre de l'histoire antérieure de l'émulsion. C'est ainsi que des plaques anciennes conservées en laboratoire humide voient la sensibilisation passer par un maximum pour une durée de traitement de 2 jours à 19°C., alors que celle-ci continue encore à croître au bout de 6 jours pour des plaques récentes conservées en glacière.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Relations entre l'activité solaire et les perturbations de la déclinaison magnétique à Lyon*. Note de MM. **Jean Dufay** et **Philippe Flajolet**, présentée par M. Charles Fabry.

1. Nous caractérisons chaque année l'agitation magnétique au moyen de l'amplitude moyenne A des perturbations de la déclinaison, évaluée en minutes d'arc, d'après les enregistrements de Saint-Genis-Laval. Le nombre relatif S de Wolf-Wolfer nous sert d'autre part à évaluer l'activité des taches solaires.

Les graphiques reproduits figure 1 permettent de comparer les variations de A et de S de 1884 à 1933, soit pendant 50 années consécutives. Ils se ressemblent davantage que les graphiques analogues publiés par Brazier [1] et par Maurain [2], qui caractérisaient du reste autrement l'agitation magnétique à Paris. A Lyon, le coefficient de corrélation entre A et S est $R = +0,58 \pm 0,09$. A Paris, Brazier avait trouvé, pour la période 1884-1917, $R = +0,33$.

Les minima d'agitation magnétique (1890, 1901, 1914, 1923) se sont toujours produits soit pendant l'année du minimum solaire, soit pendant l'année suivante; les maxima (1894, 1907, 1918, 1930) pendant l'une des deux années suivant le maximum solaire. En outre on a observé parfois (1892, 1916, 1929) un maximum d'agitation magnétique un an avant le maximum solaire, de sorte que le maximum des taches a coïncidé avec une légère dépression de la courbe d'agitation magnétique [3].

---

(1) *Annales de l'Institut de Physique du Globe de l'Université de Paris*, **2**, 1924, p. 98.

(2) *Ibid.*, 5, 1927, p. 86.

(3) Brazier a déjà fait des remarques semblables (*loc. cit.*).

2. Dans l'ensemble le parallélisme entre l'agitation magnétique et l'activité solaire paraît plus prononcé quand cette dernière va en croissant. Effecti-

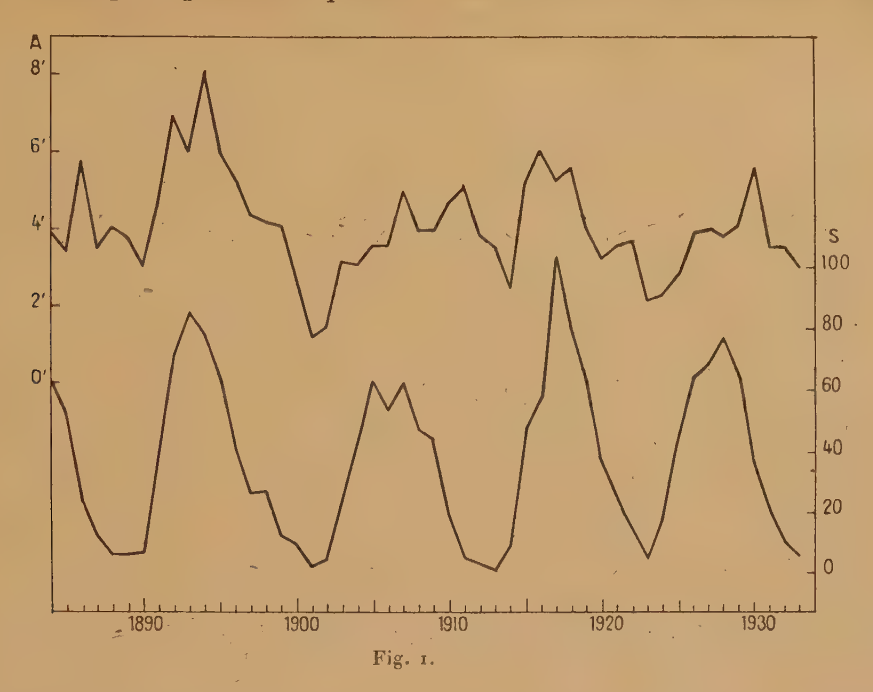


Fig. 1.

vement le coefficient de corrélation entre A et S est seulement $R = + 0,45$ pendant la phase décroissante, tandis qu'il atteint la valeur $R = + 0,76$ pendant la phase croissante, dénotant alors une forte corrélation.

Pour chercher à représenter l'allure des variations de A en fonction de S, nous avons groupé leurs valeurs en un petit nombre de moyennes, en considérant séparément la phase ascendante et la phase descendante du cycle solaire. La figure 2 montre le graphique obtenu en portant en abscisses les moyennes $\overline{S}$,

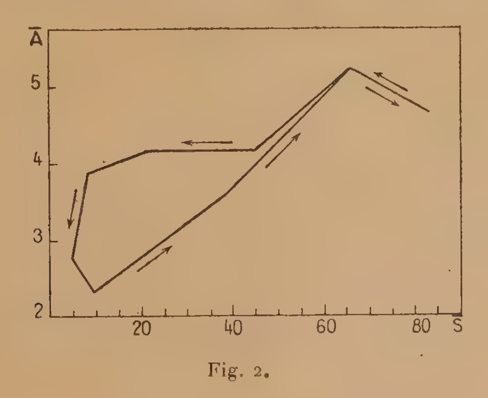


Fig. 2.

en ordonnées les moyennes correspondantes $\overline{A}$. Pendant presque toute la durée de la phase croissante, $\overline{A}$ augmente rapidement avec $\overline{S}$. Pendant la phase décroissante, $\overline{A}$ diminue plus lentement et marque un assez long palier

pour des valeurs modérées de $\overline{S}$ ([1]). Tous les points relatifs à la phase descendante se trouvent ainsi au-dessus des points relatifs à la phase ascendante, et l'ensemble dessine une sorte de cycle d'hystérésis.

3. Ces résultats s'interprètent assez bien si l'on admet que les perturbations magnétiques sont produites par des jets dirigés émis par le Soleil au voisinage des taches et qui ont d'autant plus de chances d'atteindre la Terre qu'ils se produisent à de plus basses latitudes héliographiques. Au début du cycle solaire, la latitude moyenne des taches est de l'ordre de 20°; elle diminue pendant toute la durée du cycle pour atteindre 6° à 7° vers la fin. Pendant la phase ascendante, l'efficacité des taches croît donc en même temps que leur nombre et leur étendue. L'agitation magnétique augmente alors très vite. Pendant la phase descendante, le nombre et l'étendue des taches diminuent, mais leur efficacité augmente encore, puisque leur latitude moyenne diminue toujours. Il est donc naturel que, pour des valeurs égales du nombre de Wolf-Wolfer, l'agitation soit plus grande en phase décroissante qu'en phase croissante.

ÉLECTRICITÉ ATMOSPHÉRIQUE. — *Le régime de l'ionisation à l'intérieur d'un nuage électriquement neutre.* Note de M. **Philippe Pluvinage**, présentée par M. Charles Maurain.

Étant donné un nuage caractérisé par le nombre N de gouttelettes par centimètre cube et leur rayon moyen a, et soumis à l'action des agents ionisants atmosphériques produisant q paires de petits ions par centimètre cube et par seconde, je me propose de calculer la répartition statistique des charges des gouttelettes et la densité des ions qui, dans l'état de régime, subsistent à l'intérieur du nuage. Je suppose le nuage globalement neutre et les causes d'ionisation uniformément réparties dans l'espace et dans le temps; je prendrai le rayon de chaque gouttelette égal au rayon moyen a. La mobilité K et le coefficient de diffusion D sont supposés égaux pour les ions des deux signes, ce qui est approximativement réalisé dans l'air humide. Les gouttelettes, assimilées à des conducteurs sphériques, absorbent les ions par suite de l'action de *l'image électrique*. La densité ionique n est donc assujettie à être nulle à la surface des gouttelettes. Il en résulte une diffusion des ions de l'intérieur du nuage vers cette surface. La distance des gouttelettes étant grande devant leur rayon a, on peut admettre qu'au voisinage d'une gouttelette n est seulement fonction de la distance r au centre et que, pour r grand, n prend une

([1]) En dénombrant les journées présentant une agitation magnétique notable à Paris, Bombay et Batavia, Kostitzin a trouvé également que les années *post-maximales moyennes* étaient particulièrement actives au point de vue magnétique (*Annales de l'Institut de Physique du Globe de l'Université de Paris*, 8, 1930, p. 84).

valeur n_0 densité moyenne des ions dans le nuage. Enfin le calcul montre qu'on peut négliger la production des ions au voisinage d'une gouttelette ainsi que la recombinaison des ions dans tout le nuage. Si la gouttelette porte une charge égale à p fois la charge élémentaire ε, la densité $n_1(r)$ des ions positifs satisfait à l'équation

$$\frac{d}{dr}\left(\mathrm{D}r^2\frac{dn_1}{dr}-p\varepsilon k n_1\right)=0.$$

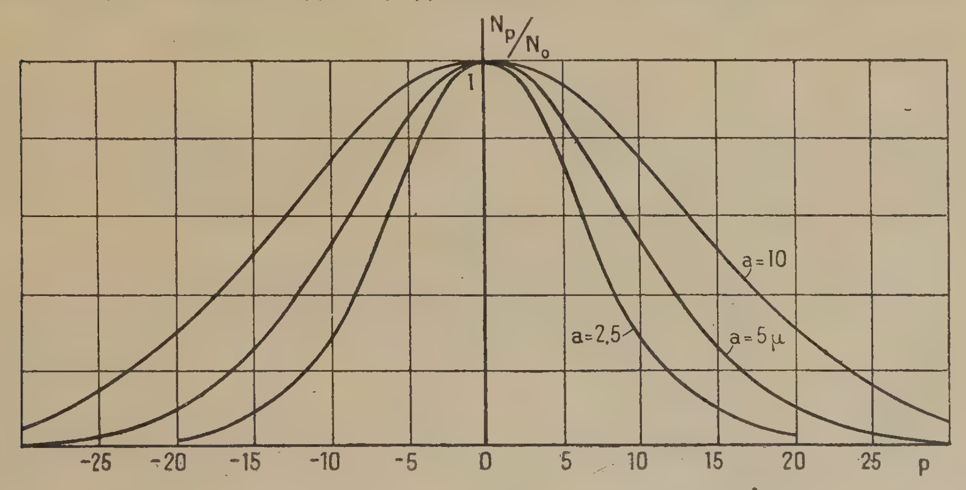
n_1 a donc pour expression, en posant $\varepsilon k/\mathrm{D}a=\eta$,

$$n_1=\frac{n_0}{\exp p\eta-1}\left\{\exp\left[p\eta\left(1-\frac{a}{r}\right)\right]-1\right\}.$$

La gouttelette absorbe donc en moyenne par seconde $\beta_p n_0$ ions positifs, en posant $\beta_p=4\pi a\mathrm{D}\,p\eta/\exp p\eta-1$.

Pour les ions négatifs le coefficient β_{-p} correspondant est égal à $\frac{4\pi a\mathrm{D}\,p\eta}{1-\exp(-p\eta)}$. En particulier, pour les gouttes neutres, $\beta_0=4\pi a\mathrm{D}$.

Ces résultats s'énoncent également ainsi : soit N_p le nombre par unité de volume des gouttelettes de charge $p\varepsilon$. Le nombre de celles qui capturent un ion positif est par seconde de $\beta_p n_0 \mathrm{N}_p$. β_p est donc un véritable coefficient de recom-



binaison entre gouttelettes et ions positifs, β_{-p} entre gouttelettes et ions négatifs. Le nuage étant, par hypothèse, globalement neutre $\mathrm{N}_{-p}=\mathrm{N}_p$. Il apparaît par seconde, aux dépens des gouttelettes de charge $p\varepsilon$, un nombre $\beta_p\mathrm{N}_p n_0$ de gouttelettes de charge $(p+1)\varepsilon$. Inversement $\beta_{-p-1}\mathrm{N}_{p+1}n_0$ gouttelettes de charge $(p+1)\varepsilon$ se transforment en gouttelettes de charge $p\varepsilon$. Dans l'état de régime les gains doivent être égaux aux pertes. D'où

$$\beta_p\mathrm{N}_p=\beta_{-p-1}\mathrm{N}_{p+1}.$$

Cette loi de récurrence permet de calculer N_p en fonction de N_0 :

$$\frac{\mathrm{N}_p}{\mathrm{N}_0}=\frac{1}{p\eta}\left\{\exp\left[-\frac{p(p-1)}{2}\eta\right]-\exp\left[-\frac{p(p+1)}{2}\eta\right]\right\}.$$

Le tracé de la courbe de répartition montre que la dispersion des charges est d'autant moindre que le rayon a est plus petit. La valeur de N_0 s'obtient en exprimant que le nombre total de gouttelettes est N :

$$N_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{p(p-1)}{2}\eta\right] - \exp\left[-\frac{p(p+1)}{2}\eta\right]}{p\eta} \right\} = N;$$

graphiquement, pour $a = 5\,\mu$, on trouve que les gouttelettes neutres forment 4,46 % du total; 76 % des gouttelettes ont une charge inférieure à $10\,\varepsilon$; 97 % à $20\,\varepsilon$.

Pour obtenir la densité ionique moyenne n_0, il suffit d'écrire que le nombre total d'ions qui disparaissent par centimètre cube et par seconde est égal à q

$$q = \beta_0 N_0 n_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (\beta_p + \beta_{-p}) N_p n_0.$$

En remplaçant $\beta_p \beta_{-p} N_p$ et N_0 par leurs expressions, il vient

$$n_0 = \frac{q}{4\pi N a D} \frac{\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p\eta} \left\{ \exp\left[-\frac{p(p-1)}{2}\eta\right] - \exp\left[-\frac{p(p+1)}{2}\eta\right] \right\}}{\sum_{n}^{\infty} \exp\left[-\frac{p(p-1)}{2}\eta\right]}.$$

Pour les valeurs de η, qui correspondent aux valeurs généralement admises pour les différentes grandeurs envisagées, le facteur de $q/4\pi N D a$ diffère très peu de 1 et l'on peut écrire, avec une grande approximation,

$$n_0 = \frac{q}{4\pi N D a}.$$

Cette valeur s'obtiendrait directement en considérant toutes les gouttelettes comme neutres. Pour $a = 5\,\mu$, on trouve $n_0 = 47$, alors que, normalement, dans les couches basses de l'atmosphère, n_0 est de l'ordre de 500. La conductibilité dans un nuage serait donc de l'ordre du 1/10 de la conductibilité de l'air extérieur. C'est bien l'ordre de grandeur qui résulte de quelques mesures de E. Mathias et G. Grenet (1) au sommet du Puy de Dôme. Une vérification expérimentale complète est en cours.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Le développement du Mildiou sur des tissus de Vigne cultivés* in vitro. Note de M. **Georges Morel**, transmise par M. Alexandre Guilliermond.

Les biologistes considèrent depuis longtemps, que la culture des Champignons et Bactéries parasites, présente un grand intérêt. Or, si certains agents

(1) 64e *Congrès des Sociétés Savantes*, 1931, p. 220.

pathogènes sont faciles à cultiver, d'autres, que l'on a qualifiés de parasites obligatoires, semblent incapables de se développer en dehors de leur hôte habituel; tel est en particulier le cas du Mildiou de la Vigne [*Plasmopara viticola* (Berk. et Curt.) Berlèse et de Tony], qui cause chaque année des ravages importants dans les vignobles. Les nombreuses tentatives effectuées en vue de réaliser sa culture sur des milieux variés ont constamment échoué.

Afin de faciliter la solution de ce problème, nous avons essayé d'obtenir le développement du Mildiou sur des tissus de Vigne cultivés *in vitro*.



Aspect d'un cal de Vigne envahi par le *Plasmopara*.
Les bouquets de conidies apparaissent comme de fines granulations blanches recouvrant tout le fragment de tissu et le masquant complètement.

Pour cela nous avons prélevé aseptiquement des fragments de jeunes sarments provenant de ceps de la variété *Aramon* et nous les avons cultivés dans un des milieux utilisés par Gautheret dans ses recherches sur la culture de tissus végétaux [1].

---

[1] Composition du milieu utilisé :

Solution de Knop diluée de moitié	1000$^{cm^3}$
Gélose	12^g
Glucose	30
Acide indol-β-acétique	0,0001
Aneurine	0,0001

Au bout d'un mois, les fragments avaient produit des cals volumineux; nous les avons alors infectés au moyen de conidies de Mildiou provenant de feuilles attaquées.

Étant donné que ces conidies ne peuvent germer qu'en milieu liquide, nous disposions une goutte d'eau stérile, à la surface du fragment et c'est dans cette goutte d'eau, que nous transportions les conidies. Les cultures étaient maintenues à une température de 20°. Dans ces conditions nous avons vu, au bout de six jours, les tissus de Vigne se couvrir d'un duvet incolore, qui, observé au microscope, présentait l'aspect caractéristique de l'appareil conidien du *Plasmopara*.

Le mycélium demeurait presque exclusivement localisé dans la profondeur des tissus; il s'insinuait entre les cellules et envoyait des suçoirs dans certaines d'entre elles. Seuls les appareils conidiens et de rares filaments mycéliens se développaient à l'air libre. En observant les régions baignées par le milieu de culture, nous avons constaté qu'aucune portion de mycélium ne se développait dans le substratum : celui-ci semblait donc impropre au développement du Champignon. Nous n'avons jamais observé la formation d'œufs.

Ces tissus, sur lesquels nous avons obtenu le développement du *Plasmopara*, étaient dépourvus de chlorophylle; ce résultat est contraire à l'opinion de nombreux auteurs, qui considèrent que seuls des tissus verts peuvent être infestés par ce Champignon.

Nous avons enfin constaté que la durée de croissance du Champignon dépend de la température et des dimensions du fragment des tissus. En général, à la température de 20°, les cultures doivent être repiquées chaque mois en transportant quelques conidies sur de nouveaux tissus de Vigne.

Nous avons obtenu des résultats identiques en utilisant comme substratum des tissus de Vigne provenant d'une souche ayant subi trois repiquages, au lieu de nous servir de fragments provenant de plantes normales.

En résumé nous sommes parvenu à cultiver le Mildiou de la Vigne sur des tissus de l'hôte normal de ce parasite, réalisant ainsi des cultures associées.

ANATOMIE COMPARÉE. — *Le télencéphale du Daman.*

Note de Mlle **Madeleine Friant**, présentée par M. Émile Roubaud.

Le Daman ou *Procavia* (avec les trois sous-genres *Procavia*, *Heterohyrax* et *Dendrohyrax*), classé aujourd'hui, on ne sait pourquoi, peut-être en raison de son placenta zonaire, à côté des Proboscidiens, est un véritable Ongulé périssodactyle; il en a tous les caractères fondamentaux : l'axe d'appui de ses extrémités passe par le rayon n° 3 et il possède aussi une poche gutturale, diverticule de la trompe d'Eustache, qui ne se rencontre que chez les Périssodactyles et chez les Cétacés, qui, phylogénétiquement, s'y rattachent (R. Anthony); sa dentition enfin le rapproche avec évidence des Rhinocéros.

A l'époque actuelle le Daman, qui habite l'Afrique et la Syrie, est le seul Ongulé de taille si réduite; mais, à l'époque tertiaire, il a existé des Ongulés (le *Tapirulus*, notamment) de très petite taille.

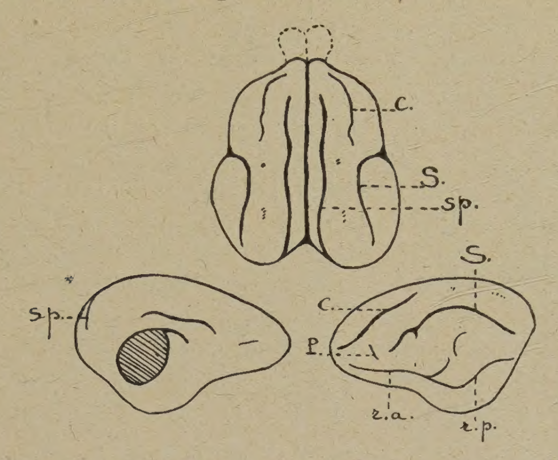


Fig. 1. — *Procavia* (*Dendrohyrax*) *arboreus adolfi-friederici* Brauer, du Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique. Mission Frechkop, 1938, n° 202. Kivu, près du Parc Albert (Congo belge). Télencéphale. Fœtus avancé (longueur de l'extrémité du museau à l'origine de la queue : 22^{mm}). *En haut :* face supérieure; *à droite*, face externe gauche; *à gauche*, face interne de l'hémisphère gauche. *r.a*, scissure rhinale antérieure; *r.p*, scissure rhinale postérieure; S, *Suprasylvia*; P, *Præsylvia*: C, Coronal; *sp*, Splénial.

Le cerveau du Daman n'a fait l'objet que d'observations contradictoires et déjà anciennes (J. Krueg, 1880; W. Turner, 1890; G. Elliot Smith, 1902).

J'ai eu l'occasion d'étudier, au Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique, le cerveau de deux fœtus de *Procavia* (*Dendrohyrax*) provenant du Congo belge. Le plus jeune même d'entre eux, encore loin du terme (longueur de l'extrémité du museau à l'origine de la queue, 16^{cm}), possède tous les sillons cérébraux de l'adulte; c'est que le Daman, à la naissance, est extrêmement développé, ainsi qu'il est de règle chez les Ongulés, dont une partie de l'enfance se passe, en quelque sorte, dans le sein de leur mère, alors que d'autres Mammifères, comme l'Ours par exemple, naissent au contraire très jeunes, leur cerveau étant encore presque lisse, à ce moment.

Voici les caractères observés (*fig.* 1);

La scissure rhinale, continue et bien visible (*r.a.*, *r.p.*), sépare le rhinencéphale du *Neopallium*.

Sur la face externe du *Neopallium*, la *Suprasylvia* (S.), arquée, limite, avec la *Præsylvia* (P.), très courte, et la scissure rhinale, le territoire central, dans lequel on n'observe aucun sillon fondamental. En avant, le Coronal (C.), allongé, se recourbe, dans sa partie antérieure, vers le plan mésial; en arrière de lui, quelques faibles dépressions marquent la trace du Latéral. Parallèlement à la scissure interhémisphérique et très près d'elle, s'étend un sillon bien marqué (Sp.) passant légèrement, en arrière, sur la face interne de l'hémisphère : c'est, incontestablement, le Splénial, sillon appartenant typiquement à la face interne, qu'on voit, cependant, chez quelques formes de petite taille (*Hyæmoschus*, *Tragulus*, *Cephalophus*, parmi les Artiodactyles; *Helictis subaurantiaca*

Swinh., parmi les Carnassiers), passer, comme chez le Daman, largement sur la face externe. On peut expliquer la position si particulière du Splénial ici, en supposant que le pli interne du manteau s'est, en quelque sorte, formé plus intérieurement qu'à l'ordinaire. Chez le *Procavia* (*Procavia*) *capensis* Pall. représenté par G. Elliot Smith et aussi chez celui figuré par W. Turner, le Splénial empiète davantage, en arrière, sur la face interne et forme, sur la face externe, avec celui du côté opposé, un angle aigu vers l'arrière. Les sillons néopalléaux varient, d'ailleurs, d'une façon assez considérable avec les sous-genres, les espèces, et même les individus considérés. Il est, toutefois, intéressant de souligner (au moins d'après les spécimens étudiés) que, dans le sous-genre *Dendrohyrax*, arboricole, la partie postérieure du Splénial, la Calcarine qui, par définition, marque, sur la face interne, la limite antérieure de l'aire visuelle ou striée, se trouve presque entièrement sur la face externe, alors que cette partie du Splénial est située, dans le sous-genre *Procavia*, habitant des steppes et des rochers, sur la face interne de l'hémisphère, comme il est de règle.

Chez les fœtus étudiés, la face interne du *Neopallium* est complètement lisse, exception faite de l'extrémité toute postérieure du Splénial (Calcarine), visible en arrière, et d'une ébauche de *genualis*, en avant du corps calleux.

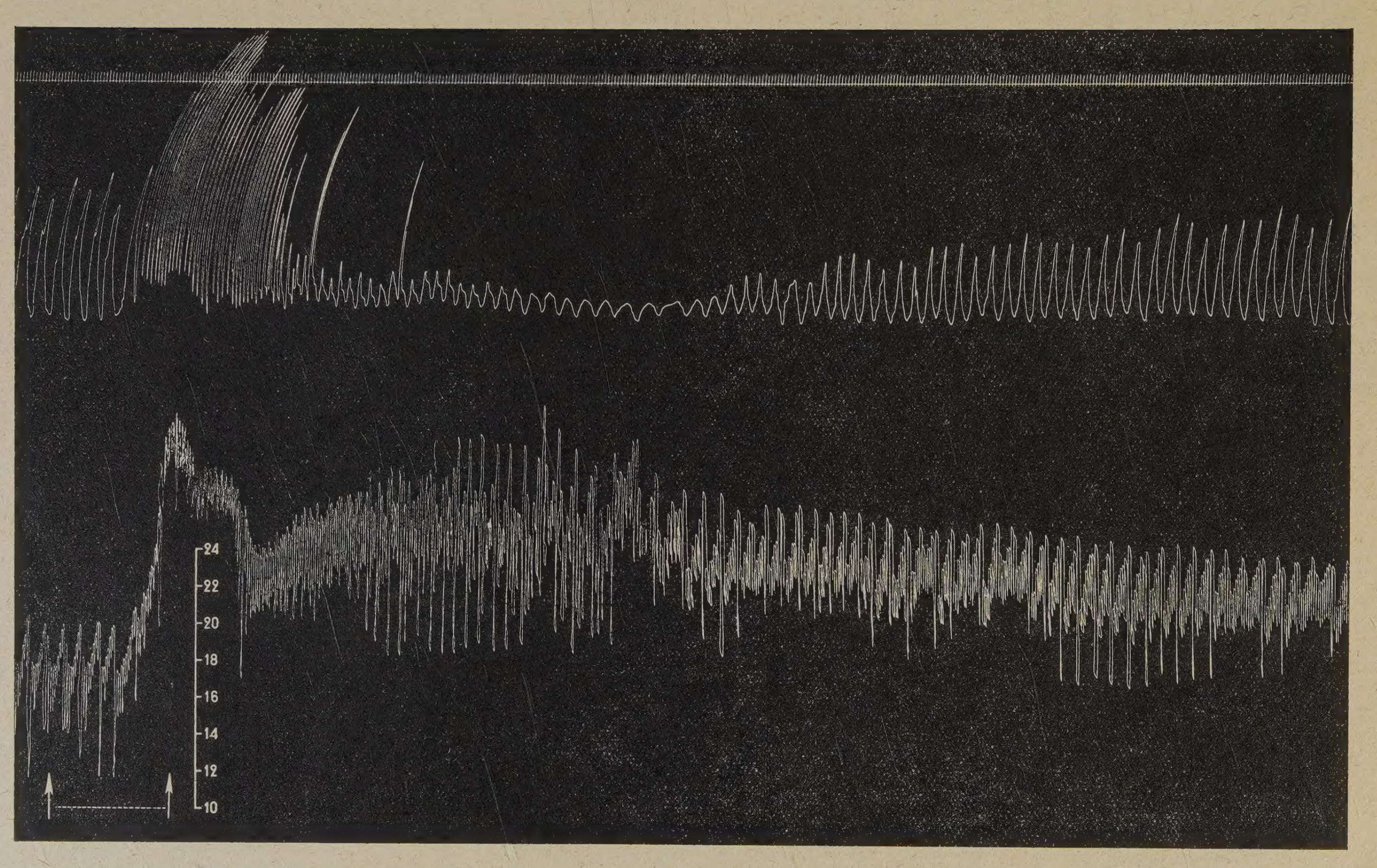
En résumé, le télencéphale du Daman est nettement celui d'un Ongulé. Si l'on n'observe pas de *Pseudosylvia*, cela tient, au moins en partie, à la petite taille de l'animal : c'est ainsi que, parmi les Artiodactyles, il n'existe de *Pseudosylvia* que chez quelques formes de grande taille (*Hippopotamidæ*, *Giraffidæ*). L'*Ectosylvia* est également absente. Il s'agit là d'un sillon qui disparaît toujours chez les Primates (le *Chiromys* excepté) et tend à disparaître dans quelques groupes de Carnassiers. Il ne faut donc pas s'étonner de son absence chez un Ongulé de petite taille. La position du Splénial, presque tout entier sur la face externe, est surtout à noter. Parmi les Périssodactyles, dont le Daman fait, certes, partie, ce sillon se trouve, au contraire, tout entier sur la face interne chez le Tapir (M. Friant, 1943), son extrémité antérieure, le crucial, passant seule sur la face externe de l'hémisphère chez le Cheval (R. Anthony et J. de Grzybowski, 1930). — Enfin il n'y a pas trace de région cérébrale operculisée, alors qu'une double operculisation (néopalléale et rhinencéphalique) s'observe chez les Périssodactyles actuels de grande taille.

PHARMACODYNAMIE. — *Sur les effets tenseurs et respiratoires de la bufoténine basique dissoute dans le diméthyl-acétonyl-carbinol.* Note (¹) de M. **Raymond-Hamet**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Parce qu'elle est pratiquement insoluble dans les solvants habituellement utilisés en pharmacologie, l'évodiamine n'a pu être étudiée sur l'animal que quand nous eûmes découvert (²) qu'elle est assez soluble dans le diméthyl-

(¹) Séance du 27 décembre 1943.

(²) Raymond-Hamet, *Communication à la Société de Chimie biologique*, séance du 16 novembre 1943.



Expérience du 17 décembre 1943. — Chien de $9^{kg},500$, anesthésié par le chloralose (12 cg/kg). 1re ligne : temps en secondes. 2e ligne : contractions respiratoires enregistrées par l'explorateur de la pulsation cardiaque de Marey. 3e ligne : pression carotidienne enregistrée au moyen du manomètre à mercure. Entre les deux flèches on a injecté lentement dans la saphène 2^{mg} de bufoténine pure de Wieland en solution dans 2^{cm^3} de diméthl-acétonyl-carbinol. Tracé réduit de moitié

acétonyl-carbinol dont D. C. Walton, E. F. Kehr et A. S. Lœvenhart [3] ont mis en évidence la faible toxicité.

Après nous être assuré que ce solvant n'altère pas les effets sympathicolytiques et hypotenseurs de la yohimbine [2], nous avons pu constater qu'il ne paraît pas modifier l'activité physiologique essentielle d'une substance hypertensive de nature nicotinique, la bufoténine.

C'est ainsi que, dans l'expérience qui a fourni le tracé ci-joint, l'injection intraveineuse de 2^{mg} de bufoténine pure de Wieland, en solution dans 2^{cm^3} de soluté physiologique de chlorure de sodium, a élevé la pression carotidienne de 202 à 315 soit de 113^{mm} de Hg et a entraîné des phénomènes respiratoires se traduisant d'abord par une forte augmentation de l'amplitude et de la fréquence des contractions, puis par une très grande réduction de celle-ci et de celle-là, enfin par le retour lent et progressif à l'état initial.

Il convient de remarquer que les phénomènes respiratoires que nous avons observés à la suite de l'injection de bufoténine diffèrent profondément de l'apnée exclusive, que H. Handowsky [4] a déclaré avoir toujours obtenue chez le Chat et le Lapin soumis à l'action de cette substance. Mais il faut noter d'autre part que l'action respiratoire de la bufoténine, telle que nous venons de la décrire, est tout à fait semblable à celle de la bufoténidine [5], qui est l'autre base azotée du venin du Crapaud commun.

La séance est levée à 16^h30^m.

L. B.

---

(3) *Journal of Pharmacology*, 33, 1928, pp. 175-183.
(4) *Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmakol.*, 86, 1920, pp. 138-158.
(5) Raymond-Hamet, *C. R. Soc. Biol.*, 137, 1943, pp. 74-75.

ERRATA.

(Séance du 13 septembre 1943.)

Note de M. *Victor Thébault*, Sur les sphères de Tücker du tétraèdre :

Page 258, ligne 22, *au lieu de* $l^2.\lambda^2 ab'c'$, *lire* $l^2.\lambda ab'c'$.
Page 259, ligne 20, *au lieu de* $\rho'_A = R(\cos A \tan\theta + \sin A)$, *lire* $\rho'_A = R/2.(\cos A \tan\theta + \sin A)$.

(Séance du 3 novembre 1943.)

Note de MM. *Robert Bouvaist* et *Victor Thébault*, Sur la géométrie du tétraèdre :

Page 419, ligne 19, *au lieu de* d'orthocentre H, *lire* d'orthocentre $H \equiv P$; lignes 20 et 21, *au lieu de* PBCD, PCDA, PDAB, PABC, *lire* HBCD, HCDA, HDAB, HABC.